LECCIONES DE GEOMETRÍA

CON ALGUNAS NOCIONES DE LA DESCRIPTIVA

ESCRITAS EN FRANCÉS

POR P. L. CIRODDE

PROFESOR QUE FUÉ DE MATEMÁTICAS EN EL LICEO NAPOLEON

OBRA AUTORIZADA

Por el Consejo de Instruccion pública de Francia

Revisada y arreglada á los últimos programas oficiales de aquella nacion

POR ALFREDO Y ERNESTO CIRODDE

DISCÍPULOS DE LA ESCUELA POLITÉCNICA, INGENIEROS DE PUENTES Y CAMINOS

Traducida de la última edicion francesa

POR D. MANUEL MARIA BARBERY

Comendador de la real órden americana de Isabel la Católica, condecorado con la medalla de África, Director de seccion retirado del Cuerpo de Telégrafos, Alumno que fué de la Academia militar de Ingenieros, Bachiller en Artes, Profesor de Matemáticas y de Geografía, Director de Caminos vecinales y Canales de riego, y Maestro de obras de la Academia de San Fernando.

—Tercera tirada.—

CORREGIDA, ANOTADA Y AUMENTADA POR EL TRADUCTOR.

MADRID.

CÁRLOS BAILLY-BAILLIERE

LIBRERO DE CÁMARA DE SS. MM., DE LA UNIVERSIDAD CENTRAL, DEL CONGRESO DE LOS SEÑORES DIPUTADOS Y DE LA ACADEMIA DE JURISPRUDENCIA Y LEGISLACION.

LIBRERÍA ESTRANJERA Y NACIONAL, CIENTÍFICA Y LITERARIA,

Plaza del Príncipe Don Alfonso (antes de Santa Ana), n.° 8.

París,	Lóndres,	Nueva-York,
J. B. BAILLIERE É HIJO.	H. BAILLIERE.	BAILLIERE HERMANOS.

1865.

A la Biblioteca de Filosofía y Letras.

[illegible]

EN LA EDICION FRANCESA SE LEE LA SIGUIENTE

N. Rodriguez Flor

ADVERTENCIA.

La tercera edicion de las *Lecciones de Geometría* contiene todas las materias que exigen los programas oficiales.

Se ha añadido el libro XI *(De algunas curvas usuales)*; y en las Nociones elementales de Geometría descriptiva, con que termina la obra, el § V *(Problemas relativos á las intersecciones de superficies)*.

Las demás partes de la obra han sido escrupulosamente revisadas para ponerlas conformes con los programas oficiales: se han sustituido las proporciones por igualdades; y siempre que ha sido posible, en vez de las demostraciones que se llaman POR REDUCCION AL ABSURDO, se han empleado otras directas. El método infinitesimal solo se ha conservado para establecer las espresiones de las medidas de áreas y volúmenes.

Finalmente, hemos creido que debíamos incluir en esta obra algunos problemas y aplicaciones de geometría práctica, que se usan casi diariamente, y que ya figuraban en la primera edicion.

A. Y E. CIRODDE.

N. F. F.

PRÓLOGO DEL TRADUCTOR.

La favorable acogida que el público ha dispensado á mi traduccion de *Las Lecciones de Geometría con algunas Nociones de la Descriptiva*, escritas en francés por P. L. Cirodde, revisadas y arregladas á los programas oficiales de Francia por Ernesto y Alfredo Cirodde; acogida que ha agotado, en poco mas de tres años, la primera y numerosa edicion publicada en 1858, es una prueba, tanto de la necesidad que habia en España de poseer estas lecciones en nuestro idioma pátrio, cuanto de la exactitud con que logré verterlas al mismo. Las atenciones del empleo que yo desempeñaba cuando hice la traduccion, me impidieron adicionarla y anotarla como deseaba y consideraba necesario; pero contando ahora con sobrado tiempo, por hallarme retirado del servicio público, á consecuencia del incendio del vapor *Génova*, ocurrido en 1859, y de resultas del cual quedé ciego, cuando me dirigia al cuartel general de nuestro ejército de operaciones en África, como Director primer Jefe de la seccion de Telégrafos, destinado al mismo, me he decidido á llevarlo á cabo. Seria prolijo enumerar todas las enmiendas, notas y adiciones que en el original francés he hecho al revisar mi trabajo para la segunda edicion: los que se tomen la molestia de comprobar aquel con esta, apreciarán todo el valor de las indicadas reformas, y estoy seguro de su aprobacion; sin embargo, como una pequeña muestra de ellas citaré aquí las siguientes:

He modificado la definicion que da el autor de la circunferencia de círculo, dejando por nota la original, núm. 21.

En la nota del núm. 32, he modificado tambien la del ángulo, y la esplicacion que da el autor acerca de cuando dos ángulos son iguales ó desiguales, tanto en el caso de considerar los rectilíneos formados en un plano por dos rectas, cuanto respecto de los diedros.

En el núm. 48 dice el autor: «*Si dos ángulos adyacentes son suplementarios, los lados esteriores están en línea recta;*» yo lo he variado en esta forma: «*Si dos ángulos son suplementarios, y se colocan de modo que un lado y el vértice coincidan, los otros dos lados quedarán en línea recta;*» y así evito la confusion que causa en el lector el llamar desde luego adyacentes á dos ángulos, que no se sabe si cumplen con las condiciones exigidas en la definicion que anteriormente se ha dado de los adyacentes.

En la teoría de las paralelas, núm. 64, añado por nota la demostracion menos defectuosa de cuantas se han dado hasta el dia acerca del Postulado de Euclides.

En el párrafo 215 decia el autor: «*En todo cuadrilátero convexo, circunscripto á un círculo, la suma de dos lados opuestos es igual á la de los otros dos;*» yo he suprimido la palabra *convexo*, porque esta propiedad se verifica tambien en los cóncavos.

Al núm. 219 añado una demostracion por cálculo acerca del valor de los ángulos interiores de un polígono; y otro tanto hago en el núm. 220, respecto de los esteriores que resultan de prolongar en un mismo sentido todos los lados de un polígono convexo.

Del mismo modo pongo en el núm. 221 una sencillísima fórmula para determinar la diferencia entre la suma de los ángulos esteriores de los salientes y los interiores de los entrantes cuando unos y otros resultan de prolongar en un mismo sentido todos los lados de un polígono cóncavo.

En la nota del núm. 254 demuestro que *los lados no paralelos de un trapecio cortan en un mismo punto á toda recta que divida en partes proporcionales á las dos bases*; y que *en otro punto la cortan las dos diagonales*.

El autor enuncia la propiedad del núm. 287, diciendo: «*Dos polígonos son semejantes cuando tienen todos sus lados menos uno proporcionales, y los ángulos comprendidos por estos lados iguales uno á uno;*» mas como yo he visto que los alumnos suelen hallar dificultad en comprender este enunciado, lo modifico diciendo: «*Se puede afirmar que dos polígonos de igual número de lados son semejantes cuando de todos los lados, menos uno del primero, conste que son proporcionales á los del segundo, con tal que además se sepa la igualdad de todos los ángulos comprendidos por aquellos lados del primero y sus homólogos del segundo.*» Una modificacion análoga introduzco en el enunciado del núm. 288.

Al tratar de la investigacion de la relacion aproximada de la circunferencia al diámetro, hago una advertencia, cuyo objeto es dar á conocer á los lectores que los métodos espuestos son mas curiosos que útiles, y que no se han calculado por ellos los diferentes valores hallados hasta el dia para el número π. Me ha parecido conveniente hacer esta advertencia para evitar que sospeche algun lector que no habia otros medios de determinar esta relacion.

Con el objeto de reunir en esta edicion todo lo mas notable de los trabajos hechos hasta ahora para valuar la relacion entre la circunferencia y el diámetro, añado al núm. 353 una nota con el valor de π hallado por los ingleses en uno de los libros indios, titulado *Upavedas*, con el hallado por Ludolffo Van-Ceulen, y con el inserto por el español Vega en su *Thesaurus logaritmicus*, impreso en Berlin, y con el existente en un manuscrito que se conserva en Oxford en la biblioteca de Ratcliff. En esta misma nota hago mencion de los principales autores que han tratado de este asunto, lo cual, además de ser instructivo, suministra á los lectores algunos puntos de erudicion histórico-científica.

Al tratar de las medidas de superficie esplico ligeramente lo mas necesario de nuestro sistema métrico-decimal, haciendo ver las relaciones entre estas medidas y las antiguas españolas.

Del importante y fecundo teorema de Euler doy otras dos demostraciones á mas de las que trae el autor, una de ellas original y mucho mas clara que la suya, y la otra fundada en el área de la esfera, y tomada de la obra que escribió mi amigo el esclarecido literato y matemático D. Alberto Lista.

Asimismo he añadido los *Apéndices* 2.°, 3.° y 4.°: en el 2.° reproduzco las demostraciones que, referentes al área del círculo, á las convexas de los cuerpos terminados por superficies curvas, á sus volúmenes y á otras varias proposiciones necesarias para la determinacion de estas superficies y volúmenes, se leian en la primera edicion francesa, que han variado los revisores, mas matemáticas en mi concepto que las sustituidas por estos: tambien incluyo el método llamado de los isoperímetros para hallar la relacion entre la circunferencia y el diámetro: en el 3.° espongo la teoría de la hipérbola, que falta en el testo francés, y que yo he puesto en consonancia con las de la elipse y parábola contenidas en capítulos anteriores: finalmente, en el 4.° doy á conocer las diferentes secciones que pueden resultar cortando un cono ó un cilindro por un plano.

Hé aquí el resultado de mis trabajos, cuya aceptacion espero del público, que si tuvo razones, sin duda de alguna importancia, para dispensarla á la edicion primera, se hallará mucho mas inclinado á hacer lo mismo con esta, mejorada y corregida notablemente. Cábeme, al menos, la satisfaccion de haber hecho lo posible por lograrlo.

Los artículos marcados con una estrella (*) no son de una importancia inmediata, y puede omitirse su estudio en la primera lectura.

Los números que van colocados entre paréntesis indican siempre que hay que referirse á los artículos á que corresponden. Por ejemplo, en la pág. 20, línea tercera, encontrarémos una llamada (**54**), que recuerda que *la medida de la distancia entre un punto y una recta es la perpendicular bajada desde el primero á la segunda.*

Igualmente, en la línea 26 de la pág. 410, hallamos el signo (G., **451**), que sirve para recordar al lector la propiedad dada á conocer en el n.º **451** de la Geometría, de que *la proyeccion de una recta sobre un plano es otra recta.*

Las citas de la Aritmética se refieren á la edicion 12.ª de esta obra

LECCIONES
DE GEOMETRIA
Y ELEMENTOS
DE GEOMETRÍA DESCRIPTIVA.

LECCIONES DE GEOMETRÍA.

NOCIONES PRELIMINARES.

1. Dice Mr. Biot en su escelente *Tratado de Física*: «Si estando »á oscuras estiendo mi brazo, tropiezo con un obstáculo; si paso la »mano sobre él, conozco que está limitado, y que al paso que ter- »mina por un lado comienza por otro, quedando libre el espacio »que le rodea: de todo esto deduzco que tal obstáculo, ó existe »realmente, ó á lo menos parece que existe fuera de mí, en una »parte del espacio que su presencia me impide ocupar; y fundado »en esto, doy á dicho obstáculo el nombre de *cuerpo*. El primero »de aquellos fenómenos, *la limitacion*, es el que caracteriza la es- »tension *figurada*, es decir, la estension cuando está dotada de »forma: el segundo, esto es, la propiedad de *escluir del sitio que* »*él ocupa á todos los demás cuerpos*, es el carácter que se conoce »con el nombre de *impenetrabilidad*.» La estension y la impenetrabilidad son dos propiedades inseparables de la materia; pero si no es posible hallar, se puede á lo menos imaginar que exista una parte del espacio limitada en todas direcciones, y sin embargo penetrable; y esto es precisamente lo que supondrémos en esta obra. Por lo tanto, un cuerpo no es para nosotros mas que una parte del espacio indefinido, FIGURADA, PENETRABLE y DIVISIBLE; porcion que tiene siempre tres *dimensiones: longitud*, *latitud* y *grueso*. Esta última dimension toma unas veces el nombre de *altura*, otras el de *profundidad*.

2. *Los límites de los cuerpos se llaman* SUPERFICIES, y no tienen mas estension que longitud y latitud.

3. Cuando se encuentran dos superficies, su interseccion es su límite comun, y se llama *línea*. Las LÍNEAS, pues, *son los límites de las superficies* y no tienen mas estension que la longitud.

4. Si dos líneas se encuentran, su interseccion es su límite comun, y se llama *punto*. Luego *los* PUNTOS *son los límites de las líneas*. El punto carece de estension.

5. No puede existir cuerpo alguno que no reuna las tres dimensiones de la estension: de modo que las superficies, las líneas ni los puntos existen independientemente del cuerpo, superficie ó línea á que limitan respectivamente; sin embargo, podemos por abstraccion considerarlos aislados. Por ejemplo, si nos proponemos medir la profundidad de una vasija, prescindimos de su longitud y latitud; al paso que si deseamos valuar su superficie, solo dejamos de apreciar su profundidad. Pero se conoce fácilmente que, cuando se quiere averiguar la cantidad de agua que contiene la vasija, deben tenerse en cuenta las tres dimensiones de esta. En consecuencia, estudiarémos sucesivamente las propiedades de las líneas, superficies y cuerpos, considerados respecto á su estension, y aprenderémos á medirla. Tal es el objeto y la division natural de la *Geometría*. Definirémos, pues, la GEOMETRÍA diciendo que *es una ciencia que tiene por objeto el estudio de las propiedades de la estension y la medida de esta.*

6. Se distinguen tres clases de líneas: la *recta*, la *curva* y la *quebrada*.

7. Se puede definir la línea recta diciendo que es *la que se dirige constantemente hácia un solo y mismo punto*. Sobre todo, no hay quien ignore lo que es una línea recta: el borde de una regla bien construida ofrece un ejemplo de ella. Todos saben tambien que *la línea recta es el camino mas corto para ir de un punto á otro*, y por consiguiente, *entre dos puntos dados solo se puede trazar una recta.* Estas son ideas que adquirimos en nuestra infancia y en que todos convenimos.

8. Se sigue tambien de esto, que siendo la línea recta que une dos puntos el camino mas corto desde el uno al otro, *es la medida natural de la distancia que los separa.*

TEOREMA I.

9. *Cuando dos rectas tienen dos puntos comunes, coinciden en toda su estension* (1).

Con efecto, si las dos rectas dadas son las ZX y Z'X' (fig. 1), y suponemos que se lleva la segunda sobre la primera, colocando los puntos A' y B' respectivamente sobre los A y B; es claro que ambas rectas coincidirán perfectamente en el intérvalo de A á B (7); ¿pero sucederá lo mismo hácia el otro lado de estos puntos? Supongamos que se separan en C, y que habiendo tomado A' X' la posicion ABCY, la hacemos girar alrededor de A, de modo que venga á caer uno de sus puntos, tal como Y, sobre la primera recta; es evidente que todos los puntos de ABY, escepto A, habrán participado de su movimiento, y los que se hallaban sobre ABX se habrán separado de ella. Tendrémos así dos rectas diferentes entre A y X, y siendo esto absurdo, tambien lo era suponer que las dos rectas pudieran separarse; luego coincidirán enteramente.

10. COROLARIO I. *Dos puntos determinan la posicion de una recta;* porque es evidente que se puede trazar una que pase por estos dos puntos (7), y acabamos de ver que solo puede pasar una línea de esta clase.

11. COROLARIO II. Cuando se hace coincidir una recta finita AB con una parte de otra indefinida ZABX, se puede considerar que las partes AZ y BX de esta son las *prolongaciones* de la otra.

12. *Una línea* QUEBRADA *es una reunion de rectas consecutivas, que se llaman sus lados.*

13. *Línea curva se llama la que ni es recta, ni se compone de líneas rectas.* Puede tambien definirse diciendo, que es la *línea descrita por un punto que en su movimiento se desvía de la direccion primitiva infinitamente poco en cada instante.*

ACDB es una línea quebrada, y AMB es una línea curva (fig. 2).

14. Es evidente que *se puede hacer pasar por dos puntos una infinidad de líneas curvas ó quebradas.*

15. De las definiciones del punto (4) y de la línea (3) se deduce, que puede considerarse engendrada esta por el movimiento de un punto, y una superficie por el de una línea.

---

(1) Hay rectas de todas magnitudes; porque se puede suponer que de los dos puntos cuya distancia mide la recta se halle tan separado el uno del otro como se quiera.

16. Hay superficies planas y curvas, así como hay líneas de los mismos nombres.

La SUPERFICIE PLANA ó EL PLANO *es en la que, uniendo dos cualesquiera de sus puntos por una recta, esta línea queda toda situada en la superficie.* Síguese de aquí, que para cerciorarse de si es plana una porcion de superficie, no hay mas que aplicarla el borde de una regla bien construida, y ver si en cualquiera posicion coincide exactamente dicho borde con la superficie.

17. *Superficie curva es la que ni es plana, ni se compone de superficie alguna plana.*

TEOREMA II.

18. *Tres puntos, que no estén situados en línea recta,* DETERMINAN *la posicion de un plano; es decir, que siempre se puede hacer pasar un plano por dichos tres puntos, pero solamente uno.*

Sean A, B, C los tres puntos (fig. 3). Unamos dos cualesquiera de ellos, A y B por ejemplo, por medio de una recta; es evidente que por AB puede pasar un plano (16), é imaginando que gira alrededor de dicha recta, llegará á apoyarse en el punto C: luego por los tres A, B y C pasa ya un plano.

Ahora digo que solo uno puede pasar. Supóngase, en efecto, que pueda pasar otro por dichos tres puntos A, B y C, y únase A con C: resulta de la definicion del plano, que las dos rectas indefinidas AB y AC se hallarán comprendidas en el plano con toda su longitud; por lo tanto, si tiramos una recta MN por un punto M cualquiera del segundo plano, y otro N, que sea tambien uno cualquiera de la recta AC, pero que esté situado á distinto lado de AB con relacion al M; necesariamente la recta MN cortará á la AB; luego tendrá dos puntos en cada plano, y, por consiguiente, se hallará toda ella en ambos. Así, pues, todo punto del segundo plano pertenece al mismo tiempo al primero; luego ambos planos coinciden, y por consiguiente, tres puntos que no estén en línea recta determinan un plano.

TEOREMA III.

19. *Dos rectas,* AB *y* CD, *que se cortan,* DETERMINAN *un plano* (fig. 4). Tómense dos puntos B y D sobre las dos rectas AB y CD, y siempre podrá pasar un plano por los tres B, O, D que no están en línea recta, y este contendrá las AB y CD, que cada una tiene dos puntos en dicho plano; además, solo podrá pasar uno, pues de lo contrario, dos planos podrian tener comunes los tres puntos B, O, D sin coincidir: luego por dos rectas que se cortan se puede hacer pasar un plano, pero nada mas que uno; y por lo tanto, dos rectas de esta clase determinan un plano ([1]).

20. *La interseccion de dos planos es una línea recta, y la de tres un punto* ([2]).

1.° Desde luego la interseccion de dos planos es una recta, pues si tuviese tres puntos que no estuvieran en línea recta, como por ellos pasaria cada uno de los dos planos, ambos coincidirian; lo que es contra el supuesto.

2.° No siendo la interseccion de tres planos mas que la de uno de ellos con la recta, en que se cortan los otros dos, será un punto.

21. La curva mas sencilla que considera la Geometría *es la circunferencia de círculo*, llamándose así *una curva plana cerrada, cuyos puntos equidistan todos de uno tomado en su mismo plano, y que se llama* CENTRO ([3]). ABCD es una circunferencia, cuyo centro es O (fig. 21).

Las rectas, como OA, *que van desde el centro á la circunferencia, se llaman* RADIOS. *Todos los radios de una misma circunferencia son iguales*, supuesto que miden las distancias del centro á los diferentes puntos de la circunferencia (8).

Se llama DIÁMETRO *una recta que, pasando por el centro, termina por sus dos estremos en la circunferencia;* un diámetro es, por consiguiente, la suma de dos radios, y por lo mismo, *todos los diámetros son iguales.*

Se da el nombre de *arco* á una parte cualquiera de la circunferencia; así AMB, BNC... son arcos.

([1]) En este teorema se funda el procedimiento que usan los picapedreros para labrar una superficie plana. Sobre dos bordes contiguos de la piedra forman dos fajas, para aplicar sobre ellas el borde de una regla, y trazan con el lapiz dos rectas que se cortan. Considerando despues estas líneas como dos *directrices* fijas, hacen resbalar sobre ellas el borde de las reglas, y quitan á la piedra lo que les impide aplicarle exactamente en todas direcciones sobre las dos rectas.

([2]) Téngase presente que el autor no considera el caso en que los tres planos pasen por una misma recta, pues entonces esta seria su comun interseccion. (*Nota del traductor*).

([3]) De este modo he corregido la definicion que da el autor de la circunferencia. Él dice: «Es una línea cuyos puntos están situados en un mismo plano, é igualmente distantes de otro punto tomado en este plano.» Aceptando esta definicion, un arco de circulo seria una circunferencia. (*N. del T.*).

CÍRCULO *es la parte de plano comprendida dentro de la circunferencia.*

22. Las curvas mas usuales despues de la circunferencia de círculo, son: la *Elipse*, la *Parábola*, la *Hipérbola* y la *Hélice*: mas adelante darémos algunos detalles acerca de ellas.

LIBRO PRIMERO [1].

DE LAS LINEAS.

CAPÍTULO PRIMERO.

DE LA LÍNEA RECTA.

§ I.—De la medida de las líneas rectas.

23. Siendo, como hemos visto (8), la medida natural de la distancia entre dos puntos la recta que los une, se comprende bien cuán interesante es saber medir una línea de esta clase. Ocupémonos, pues, de resolver esta cuestion.

PROBLEMA I.

24. *Medir una recta dada.*

Medir una línea recta, es buscar su relacion con otra que se toma *convencionalmente* por unidad. Si esta unidad estuviese contenida un número exacto de veces en la recta que se mide, este número seria la medida buscada; pero cuando esto no se verifica, es preciso averiguar si hay una cierta longitud que, estando contenida exactamente en la unidad lineal y en la recta dada, sea, por consiguiente, la *medida comun* de ambas. Supongamos verificado esto, es decir, que las dos líneas sean *comensurables* entre sí, encontrándose, por ejemplo, que la recta dada y la unidad lineal contienen respectivamente 15 veces y 7 veces una longitud misma, se concluirá que esta

(1) En los cinco primeros libros de esta obra supondremos que todas las figuras están trazadas en un plano.

longitud es la *sétima* parte de la unidad lineal, y que la recta que se mide vale quince veces la sétima parte de esta unidad; es decir, que equivale á sus $\frac{15}{7}$. Luego *la medida buscada tiene por espresion un quebrado, cuyos dos términos son los números que espresan las veces que la comun medida cabe en las dos rectas que se comparan.*

Cuando la recta propuesta sea *incomensurable* con la unidad lineal, la medida no será asignable numéricamente, mas no por eso dejará de existir, y verémos á su tiempo que se la puede obtener, si no exactamente, al menos con tanta aproximacion como se desee.

25. La determinacion de la medida de una recta queda, pues, reducida á la resolucion del siguiente problema: *Dadas dos rectas,* AB y CD (fig. 5), *hallar su comun medida, si la tienen.*

Discurriendo por lo que hace á las dos rectas, como se hizo en aritmética cuando se trató de hallar el máximo comun divisor de dos números, tendrémos que llevar la menor CD sobre la mayor AB cuantas veces sea posible, y hallarémos, por ejemplo, que la primera cabe en la segunda dos veces desde A hasta F, quedando una resta FB; de modo que

[1] $$AB = 2CD + FB;$$

lo que manifiesta que CD no es la comun medida buscada. Mas tambien se verá, como en aritmética, que la mayor medida comun de las rectas AB y CD es la misma que la de CD y de FB. Llevo, pues, FB sobre CD, y encuentro que aquella se halla contenida en esta tres veces desde C hasta G, quedando un resto GD; luego

[2] $$CD = 3FB + GD.$$

Llevo ahora GD sobre FB, y la encuentro contenida en esta una vez, con un resto IB; luego

[3] $$FB = GD + IB.$$

Finalmente, colocando IB sobre GD, se encontrará, por ejemplo, que aquella está contenida en esta tres veces exactamente; así

$$GD = 3IB$$

Por lo tanto IB es la mayor medida comun de las rectas AB y CD.

Se deduce de lo espuesto que, *para hallar la mayor medida comun* *de dos rectas, debe aplicarse á estas el método dado en aritmética para hallar el máximo comun divisor de dos números.*

26. Ya que se conoce la medida comun de las dos rectas AB y CD, es menester, para valuar su relacion, determinar las veces que cada una de ellas contiene á la IB. Ahora bien; como la ecuacion [3] nos dice que, por ser $GD=3IB$, FB valdrá $3IB+IB=4IB$, subiendo por las ecuaciones [2] y [1], se hallará al instante que CD vale por un lado tres veces 4IB ó 12IB, y por otro 3IB, lo que hace en todo 15IB; y tambien que AB contiene dos veces 15IB ó 30IB, y además 4IB; es decir, 34IB. Luego si la comun medida IB se halla 34 veces en AB y 15 veces en CD, es consiguiente que la relacion entre ambas líneas es $\frac{34}{15}$, y que si CD es la unidad lineal, esta fraccion $\frac{34}{15}$ es la medida ó *la longitud* de AB.

27. *Llamarémos en adelante* LONGITUD DE UNA LÍNEA *á su relacion con la unidad lineal.*

28. Nótese que la fraccion obtenida $\frac{34}{15}$ es irreductible, porque de otro modo IB no seria la mayor comun medida de las rectas AB y CD. Se ve, con efecto, que si hubiésemos encontrado $AB=35IB$, en cuyo caso la relacion de AB con CD seria $\frac{35}{15}$, fraccion cuyos dos términos son divisibles por 5, las dos rectas dadas tendrian 5IB por comun medida; porque en tal caso, AB y CD valdrian respectivamente 7 veces y 3 veces 5IB.

29. Cuando son *comensurables* dos rectas A y B, la operacion del número 25 es necesariamente limitada; porque si p y q indican las veces que cada una de ellas contiene la comun medida L, será $A=pL$ y $B=qL$; de modo, que la operacion de que se trata es la misma que debiera ejecutarse sobre los números p y q para determinar su máximo comun divisor, y esta solo exige un número finito de divisiones.

30. Por el contrario, si las rectas A y B son *incomensurables*, la operacion no puede terminarse [1]; porque si se pudiese hallar una recta que estuviera contenida exactamente en la anterior, aquella seria la medida comun de las A y B.

¿Qué idea debemos formarnos de tales rectas? Supóngase que despreciando una resta cualquiera se toma la precedente, que llamarémos L, por medida comun de las dos A y B, y admítase que estas rectas contienen p veces y q veces á la L, dejando las res-

---

[1] Téngase presente que esto jamás se verificará en la práctica; porque se llegará pronto á una resta imperceptible á los sentidos por su pequeñez.

tas respectivas α y β menores que L, y se tendrá $A-\alpha=pL$ y $B-\beta=qL$: luego la relacion $\frac{A-\alpha}{B-\beta}$ es igual á $\frac{p}{q}$. Pero α y β son dos cantidades variables que disminuyen al mismo tiempo que la resta L en que nos hemos detenido, y que tienen, por consiguiente, á *cero* por límite *(Aritmética,* **236**) [1]; luego la relacion $\frac{A-\alpha}{B-\beta}$ converge hácia un cierto límite, y como sus dos términos se acercan respectivamente á A y B, este límite es lo que se llama la relacion entre A y B. Luego LA RELACION DE DOS MAGNITUDES INCOMENSURABLES *es el límite hácia el cual tienden las relaciones sucesivas que se obtienen, cuando se reemplazan dichas magnitudes por cantidades comensurables que se les aproximan indefinidamente.*

Por lo tanto, cuando las rectas A y B sean comensurables, se calculará exactamente su relacion; pero cuando sean incomensurables, solo se la podrá obtener aproximadamente, si bien la aproximacion será tan grande como se desee, para lo cual bastará detenerse en una resta suficientemente pequeña; esto es, tomar por valor de esta relacion la de dos cantidades comensurables, cuya medida comun puede ser tan pequeña como se quiera.

Teorema I.

31. *Si dos líneas quebradas* ABC *y* AOC (fig. 6), *compuesta cada una de dos rectas, terminan en los mismos puntos* A *y* C, *envolviendo la una á la otra* [2], *la primera será mayor que la segunda.*

Con efecto, prolónguese AO hasta que encuentre en D á la BC; el punto D se hallará entre B y C, puesto que ABC envuelve á AOC. Establecido esto, la recta OC es mas corta que la línea quebrada ODC (7); luego, añadiendo AO á una y otra, se tendrá

$$AOC < ADC.$$

---

(1) No admite duda que las cantidades α y β tienen á cero por límite; porque si se consideran tres restas consecutivas cualesquiera R, R′, R″, se tendrá $R' > R''$. Pero R vale al menos $R'+R''$: luego es mayor que 2 R″; luego una resta cualquiera es menor que la mitad de la resta anteprecedente; así la 2.ª, 4.ª, 6.ª... restas son respectivamente menores que $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$,... de la recta menor B; luego al cabo de cierto número de operaciones se llegará á una resta L menor que cualquiera otra dada *(Aritmética,* **236**). Pero α y β son menores que L; luego tienen á cero por límite.

(2) De dos líneas quebradas, como las de la figura, situadas á un mismo lado de la recta que une sus estremos comunes, la mas próxima á esta recta se dice que está *envuelta* por la otra.

Por otra parte, la recta AD es mas corta que la línea quebrada ABD; luego, añadiendo á ambas DC, resultará

$$ADC < ABC;$$

y de aquí se sigue que AOC, menor que ADC, es con mas razon menor que ABC.

§ II.—De las perpendiculares y oblícuas.

32. Si dos rectas AB, CD (fig. 4) se cortan, dividen el plano que determinan (19) en cuatro partes AOC, COB, BOD, DOA, cada una de las cuales se llama un *ángulo*. Por lo tanto, *un* ÁNGULO *es una porcion indefinida de superficie plana, comprendida entre dos rectas que se cortan y que se terminan mútuamente en su punto de seccion.* A este punto se da el nombre de *vértice* del ángulo, y á las dos rectas el de *lados*: así O es el vértice del ángulo AOC, y OA y OC son sus lados [1].

Se designa, como se ve, un ángulo por tres letras, de las cuales las dos estremas indican dos puntos de sus lados, y la del medio pertenece al vértice. A veces se nombra solamente un ángulo por la letra colocada en su vértice; pero es menester para esto que este vértice no sea comun á otros ángulos: así, en la figura 2, se puede decir el ángulo C para designar el ACD.

33. Nótese que la magnitud de un ángulo depende únicamente de la cantidad de superficie plana comprendida entre sus lados, y, por consiguiente, de su separacion; de modo que si se construye sobre

[1] Como el ángulo existiria sin que existiese el plano, me parecen mas lógicas y adecuadas las siguientes definiciones, que da á sus discípulos mi amigo el ilustrado profesor Sr. D. Federico Saavedra:

ANGULO *es la posicion de dos rectas que se cortan y que terminan en el punto de su interseccion.* Este punto se llama el *vértice*, y las dos rectas que se consideran se llaman los *lados del ángulo.*

Se dice que *dos ángulos* A *y* B *son iguales cuando pueda superponerse el* A *al* B, *de modo que, coincidiendo el vértice y un lado del primero con el vértice y un lado del segundo, el otro lado del primero coincida con el otro de* B.

Se dice que *un ángulo* A *es mayor que otro* B *cuando se pueda colocar* A *sobre* B, *de modo que, coincidiendo los vértices y un lado de cada ángulo, el otro lado de* B *quede entre los dos de* A.

De aquí se deduce inmediatamente que *la magnitud de un ángulo no depende en manera alguna de la longitud de sus lados, sino de la posicion que el uno tenga respecto al otro.* (*Nota del T.*).

AB el ángulo DAB igual al BAC (fig. 7), y sobre AD el ángulo FAD=DAB, etc., los ángulos DAC y FAC,.. serán respectivamente el duplo y el triplo.... del ángulo BAC. Síguese de aquí que es posible comparar muchos ángulos con uno tomado por *unidad*, medirlos, y consiguientemente someterlos al cálculo. Así es que, tomando á BAC por unidad, los ángulos DAC y FAC valdrán el uno 2 y el otro 3 unidades.

Podemos tambien hacernos cargo con facilidad de la magnitud de un ángulo, suponiendo que ha sido engendrado por una recta AD que, confundida al principio con AB, se eleva y separa de esta progresivamente girando alrededor del punto A.

34. Puesto que los lados de un ángulo deben suponerse indefinidos siempre, y que dos rectas que tienen dos puntos comunes coinciden en toda su estension (9), se deduce que *dos ángulos son iguales cuando, colocado el uno sobre el otro, se confunden perfectamente en cierta parte de su estension.*

35. Este principio promovió la idea de un instrumento muy sencillo para construir un ángulo igual á otro dado. Dicho instrumento, que se llama *falsa escuadra*, consta de dos reglas AB y AC (fig. 8), que giran *con alguna dificultad* alrededor de un pasador con que se fijan, como las piernas de un compás. Ahora bien, si se quiere tirar por un punto O de una recta OD otra que forme con ella un ángulo dado M, se ajustará la falsa escuadra de modo que sus dos bordes interiores coincidan exactamente con el ángulo dado, y el que dichos bordes formen entre sí será perfectamente igual á M; luego si se coloca uno de los bordes AB sobre OD y el punto A (interseccion de los dos bordes interiores) sobre O, y se hace resbalar un lapiz que marque á lo largo del otro borde AC, la recta OK, determinada así, formará con OD un ángulo igual á BAC, y, por consiguiente, al ángulo dado.

A veces cada regla termina en una punta, y entonces se puede emplear la falsa escuadra en los mismos casos que el compás.

36. Suponiendo que una recta OC (fig. 9), confundida en un principio con OA, gira alrededor del punto O, alejándose de la parte OA, esta recta formará con AB dos ángulos llamados *adyacentes* ó *contiguos*, uno de los cuales, COA, aumentará constantemente desde cero, y el otro, COB, por el contrario, disminuirá sin cesar hasta anularse, lo cual se verificará cuando CO llegue á confundirse con OB. Se concibe, segun esto, que habrá una posicion OD de la recta móvil, y *posicion única*, en que formará con AB dos ángulos iguales, DOA y DOB; entonces se dice que dicha posicion de la recta móvil es *perpendicular* á la AB. Así, *una recta es* PERPENDICULAR *á otra cuando forma con esta otra dos ángulos adyacentes iguales, á los cuales se llama* ÁNGULOS RECTOS.

TEOREMA II.

37. *Por un punto de una recta se puede levantar á esta siempre una perpendicular, pero solo se la puede levantar una hácia el mismo lado.*

La verdad de esta proposicion es una consecuencia inmediata de las consideraciones precedentes.

TEOREMA III.

38 *Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.*

Sean OC perpendicular á AB (fig. 10), y O'C' perpendicular á A'B'; digo que los ángulos rectos C'O'A' y C'O'B' son iguales á los ángulos rectos COA y COB. Marquemos, en efecto, sobre el lado AO un punto D cualquiera, y tomemos sobre O'A' la distancia O'D'=OD. Supongamos ahora que se lleva la figura C'A'B' sobre la CAB, colocando los puntos O' y D' respectivamente sobre los O y D, lo que es posible, porque O'D'=OD; las dos rectas A'B' y AB coincidirán en toda su estension (9), y, por consiguiente, O'C' caerá sobre OC, pues de lo contrario se tendrian dos perpendiculares á la AB en el mismo punto O, lo cual no puede ser (37). Por consiguiente, los ángulos C'O'A' y C'O'B' cubrirán perfectamente á los respectivos COA y COB; luego estos ángulos son iguales, pero son rectos; luego los ángulos rectos son iguales.

39. Llámase ángulo *agudo* á todo el que es menor que un recto, y á todo ángulo mayor que un recto se da el nombre de *obtuso:* así, en la figura 9, en que OD es perpendicular á la AB, el ángulo COB es obtuso, y el COA agudo.

TEOREMA IV.

40. *Cuando una recta* OC *encuentra á otra* AB (fig. 9), *la suma de los dos ángulos adyacentes*, COA y COB, *es igual á la de dos ángulos rectos.*

Levántese en el punto O la OD perpendicular á la AB, y resultarán los dos ángulos rectos DOA y DOB; y con esta construccion, como el ángulo COB se compone de los COD y DOB, la suma de los dos ángulos AOC y COB será igual á la de los tres AOC, COD y DOB; pero la suma de los dos primeros forma el ángulo recto AOD, y el tercero DOB es recto tambien: luego la suma de los dos ángulos AOC y COB es igual á la de los dos rectos AOD y DOB, y, por consiguiente, á la de dos ángulos rectos cualesquiera (38).

41. Corolario I. Si uno de los ángulos COA ó COB es recto, el otro tambien lo será.

42. Corolario II. *Si una recta* OD *es perpendicular á otra* AB, *esta segunda lo será tambien á la primera.*

En efecto, prolónguese OD por bajo de AB, y siendo el ángulo AOD recto por hipótesis (36), su adyacente AOF lo es tambien; luego AO forma con DF dos ángulos adyacentes iguales, AOD y AOF (38); luego AO es perpendicular á DF.

43. Corolario III. Una vez que el ángulo AOF es recto, su adyacente FOB tambien lo es; luego OF es perpendicular á AB; por lo tanto, *cuando una recta* OD *es perpendicular á otra* AB, *su prolongacion* OF *lo es tambien.*

44. Corolario IV. *La suma de todos los ángulos adyacentes* IOA, AOB, BOC, *formados alrededor de un mismo punto y hácia el mismo lado de una recta* IC, *es igual á dos rectos* (fig. 11); porque su suma es la misma que la de los dos ángulos adyacentes IOB y BOC.

45. Corolario V. *La suma de todos los ángulos* AOB, BOC, COD, DOA, *formados alrededor de un mismo punto* O, *es igual á cuatro rectos.* Prolónguese, en efecto, CO hasta I, y es evidente, segun el corolario que precede, que la suma de los ángulos IOA + AOB + BOC + COD + DOI es igual á cuatro rectos. Pero IOA + DOI = AOD; luego, etc.

46. Cuando la suma de dos ángulos es igual á dos rectos, se dice que cada uno de ellos es el *suplemento* del otro, ó que estos ángulos son *suplementarios.* Claro es que *dos ángulos que tienen el mismo suplemento son iguales*, porque añadiéndoles un mismo ángulo, se obtiene la misma suma, dos ángulos rectos.

47. Cuando la suma de dos ángulos es igual á un ángulo recto, se dice que cada uno de ellos es el *complemento* del otro, ó que estos ángulos son *complementarios.* Resulta de esto que *dos ángulos que tienen el mismo complemento son iguales.*

Teorema V.

48. *Si dos ángulos* AOC *y* C'O'B *son suplementarios, y se los coloca de modo que el lado* C'O' *coincida con el* CO *y el vértice* O' *con el vértice* O, *de modo que el punto* B *caiga á diferente lado que* A *respecto del comun* OC, OB *tiene que estar en la prolongacion de* AO.

En efecto, la prolongacion de AO formará con OC un ángulo, que será el suplemento del COA, é igual, por consiguiente, al C'O'B (46); luego la prolongacion de AO tiene que coincidir exactamente con OB, que ya formaba con O'C' confundido, ahora con OC, un ángulo suplemento del AOC.

49. Escolio. Cuando dos proposiciones son tales que, tratando del mismo asunto, la hipótesis que se hace en la una es precisamente el juicio ó consecuencia que se deduce de la otra, y *viceversa*, se dice que la una es *recíproca* de la otra. Así, la proposicion precedente es la recíproca de la del número 40; porque en ambas la recta OC, que concurre á formar los ángulos COA y COB, es el asunto: la hipótesis de la proposicion del número 40 es que AOB *es una línea recta*, y el juicio ó consecuencia es que COA+COB *igual á dos rectos;* al paso que la hipótesis de la proposicion del número 48 es que COA+COB *igual á dos rectos*, y la consecuencia que AOB *es una línea recta.*

Teorema VI.

50. *Cuando dos rectas* AB y CD *se cortan* (fig. 4), *los ángulos opuestos por el vértice, tales como* AOC *y* BOD, *son iguales.*

Efectivamente; puesto que AOB es una línea recta, el ángulo COB es suplemento de COA; asimismo, puesto que COD es una línea recta, el ángulo COB es tambien suplemento de BOD; luego los dos ángulos COA y BOD, tienen el mismo suplemento, y, por consiguiente, son iguales.

Teorema VII.

51. *Por un punto dado se puede tirar una perpendicular á una recta dada, pero solamente una.*

Pueden ocurrir dos casos: que el punto esté situado en la recta ó fuera de la recta.

El primer caso se demostró en los números 37 y 48; ocupémonos, pues, del segundo.

Supongo que el punto C se halle fuera de la recta AB (fig. 12), y digo desde luego que desde él se puede bajar una perpendicular á AB. Para justificarlo, hago girar la parte superior del plano alrededor de AB, como charnela, hasta que el punto C haya venido á caer en cualquiera otro C′ de la parte inferior de este plano; deshaciendo ahora el giro y volviendo la parte superior del plano á su posicion primitiva, uno el C con C′, y sea D el punto en que la recta CC′ corta á la AB. Si se dobla de nuevo la figura á lo largo de AB, el punto D permanecerá inmóvil, y es claro que el ángulo CDA se confundirá con el C′DA; luego AB es perpendicular á CC′, y recíprocamente CC′ lo es á la AB (42).

Supongamos ahora que se pueda bajar desde el punto C otra perpendicular CI sobre AB. Haciendo girar la parte superior del plano alrededor de AB, la CI tomará la posicion C′I; luego el ángulo C′ID es recto, como su igual CID; mas siendo adyacentes estos dos ángulos han de tener sus lados esteriores, CI y C′I, en línea recta (48); luego desde el punto C al C′ irian dos rectas diferentes CC′ y CIC′, lo cual es absurdo (7); luego no es posible bajar desde el punto C dos perpendiculares sobre AB.

52. Se dice que *una recta es* OBLÍCUA *respecto de otra cuando la encuentra sin serle perpendicular*. Es consecuencia del número precedente, que si desde un punto C se baja una perpendicular CD sobre AB, cualquiera otra recta, tal como CI, que, partiendo del punto C vaya al encuentro de AB, será oblícua respecto de esta.

Teorema VIII.

53. *Cuando una perpendicular* CD *y una oblícua* CI, *respecto de una recta* AB, *parten del mismo punto* C, *la perpendicular es mas corta que la oblícua* (fig. 12).

Efectivamente, haciendo girar la parte superior del plano alrededor de AB, como charnela, hasta que el punto C se coloque tal como en C′ sobre la parte inferior, unamos C′ con D y con I: las dos rectas C′D y C′I serán los rebatimientos de CD y de CI, de modo que les serán iguales; además, CDC′ será una recta, pues los ángulos CDI y C′DI son rectos (48); y como la recta CDC′ es menor que la quebrada CIC′, la CD, mitad de CDC′, será menor que CI, mitad de CIC′, segun se queria demostrar.

54. COROLARIO I. *Siendo la perpendicular la mas corta de cuántas rectas van desde un punto al encuentro de otra, es la medida de la distancia entre el punto y la recta.*

55. COROLARIO II. *Cuando una recta es la mas corta que se puede tirar desde un punto á otra, es perpendicular á esta*, porque si no lo fuese dejaria de ser la mas corta.

TEOREMA IX.

56. *Cuando una perpendicular* CD, *y varias oblícuas* CA, CB, CI, *respecto de una recta* AB, *parten del mismo punto* C, *situado fuera de esta recta* (fig. 12), *se verifica: 1.° que las oblícuas que distan igualmente del pié de la perpendicular son iguales; 2.° que de dos oblícuas que se apartan desigualmente del pié de la perpendicular, la que se aleja mas es la mas larga.*

1.° Sea DA = DB, digo que CA = CB. Doblemos, en efecto, la figura á lo largo de CD, y es claro que el segmento DA vendrá á caer sobre el DB, pues siendo iguales los ángulos CDA y CDB (36), se pueden superponer; y como DA = DB, el punto A vendrá á colocarse sobre el B, y teniendo así la recta CA confundidas sus dos estremidades con las de CB, coincidirá con ella en toda su estension, y estas dos rectas serán, por consiguiente, iguales.

2.° Supongamos DI > DA, digo que CI > CA. Doblemos la figura á lo largo de AB, y sean C'D, C'A y C'I los abatimientos respectivos de CD, CA y CI: CDC' será una línea recta, y resultará C'A = CA, y C'I = CI. Pero la línea quebrada CIC' es mas larga que la CAC' á que envuelve (31); luego CI, mitad de CIC', es mayor que CA, mitad de CAC'; luego de dos oblícuas que se apartan desigualmente del pié de la perpendicular, la que se aleja más es la mas larga.

57. COROLARIO I. Recíprocamente, *dos oblícuas iguales equidistan del pié de la perpendicular*, porque si así no fuese seria una de ellas mas larga que la otra; y *de dos oblícuas desiguales, la mas larga se aleja más del pié de la perpendicular*, porque si así no fuese, seria igual ó menor que la otra.

58. COROLARIO II. *Desde un punto no se pueden tirar á una línea tres rectas iguales.* En efecto, si desde este punto se baja una perpendicular sobre la espresada recta, podrán ocurrir tres casos: 1.° ó la perpendicular coincide con una de las tres rectas, y entonces esta será menor que las otras dos; 2.° ó dejará dos de ellas hácia un

mismo lado, y estas dos serian desiguales; 3.° ó deja á las tres hácia un mismo lado, y entonces serian todas desiguales.

Teorema X.

59. *Todo punto* M, *situado sobre la perpendicular* CD, *levantada á una recta* AB, *en su medio* D (fig. 12), *está igualmente distante de los estremos* A y B *de esta recta; y todo punto* E, *fuera de dicha perpendicular, dista desigualmente de los mismos estremos.*

1.° Puesto que el punto D es el medio de AB, las oblícuas MA y MB equidistan del pié de la perpendicular MD; luego son iguales.

2.° Tírense desde el punto E las rectas EA y EB á los A y B, y sea M el punto en que la primera corta á la perpendicular CD; este punto equidistará de A y de B, de suerte que, uniendo M con B, resultará MA$=$MB; pero la recta BE es mas corta que la línea quebrada EMB (7), y por consiguiente, menor que la igual á esta EMA; luego todo punto situado fuera de la perpendicular CD dista desigualmente de los A y B.

60. Corolario I. Se sigue de lo espuesto, que *la perpendicular levantada á una recta en su medio, pasa por todos los puntos equidistantes de los estremos de dicha recta;* porque todos los puntos de esta perpendicular equidistan de los dos estremos de la recta, y son los únicos del plano que gozan de esta propiedad. En virtud de esto se dice que *el* lugar geométrico *de todos los puntos equidistantes de dos dados es la perpendicular levantada en el medio de la recta que une estos dos.*

61. Corolario II. Una consecuencia del anterior corolario y del principio del número 9 es, que *si una recta* CC′ *pasa por dos puntos* C y C′, *equidistantes de los estremos* A y B *de otra* AB, *será perpendicular á esta última en su punto medio*; porque si en el medio de AB se levanta una perpendicular á esta recta, pasará por todos los puntos equidistantes de sus estremos A y B, y de consiguiente por los C y C′; luego tendrá dos puntos comunes con la CC′, y coincidirá con esta recta; por consiguiente, CC′ será la *misma perpendicular* levantada en el medio de AB.

§ III.—De las paralelas.

Teorema XI.

62. *Dos perpendiculares* AB y CD, *á una misma recta* FG (fig. 13), *no pueden encontrarse, aunque se las prolongue indefinidamente.*

Porque si se encontrasen, se podrian bajar desde su punto de interseccion dos perpendiculares á la misma recta FG, lo que es absurdo (51). Dos rectas de esta especie se llaman *paralelas.*

63. *Llámanse, pues,* PARALELAS *dos rectas que, estando situadas en un mismo plano, no pueden encontrarse, aunque se las prolongue cuanto se quiera*· así, dos perpendiculares á la misma recta son paralelas.

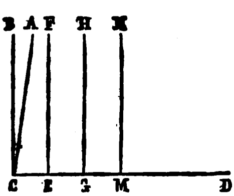
64. La teoría de las paralelas se funda en la proposicion siguiente, conocida bajo el nombre de *Postulado de Euclides*, y que admitirémos como una verdad evidente por sí misma.

Cuando una perpendicular AB *y una oblícua* FG *caen sobre una recta* CD (fig. 14), *la oblícua encuentra á la perpendicular y la encuentra hácia el lado del ángulo agudo* (1).

---

(1) Hasta ahora no han podido los matemáticos dar una demostracion rigorosa de este célebre postulado de *Euclides*; pero siendo la menos defectuosa la siguiente, voy á esponerla tal como se encuentra en el escelente *Tratado de Geometría* escrito por nuestro compatriota el eminente literato y sabio matemático D. *Alberto Lista.*

Sea EF la recta dada: por el punto C tiro á esta la perpendicular CD: levanto en C la CB perpendicular á la CD; será paralela á EF por ser ambas perpendiculares á la CD. Digo que la CA, que forma ángulo agudo con la CD, se ha de encontrar con la EF. Para demostrarlo veo cuántas veces cabe el ángulo BCA en el recto BCD, y sea n este número de veces. Tomo sobre la CD n número de partes iguales á la CE, y por los puntos de division tiro GH, MN..... perpendiculares á CD. Habré formado n número de bandas iguales; porque teniendo las bases iguales y los ángulos adyacentes á las bases rectos, se podrán sobreponer unas á otras.



Ahora, el espacio indefinido, comprendido en el ángulo recto BCD, es mayor que el espacio indefinido BCMN; porque este no se estiende sino por la parte superior, y el otro se estiende por la derecha y por la parte superior; dividiendo uno y otro espacio por n, quedará el espacio angular BCA mayor que la banda BCEF. Pero el espacio angular BCA no puede ser mayor que la banda BCEF, si la CA no se corta con la EF: luego por el punto C no se puede tirar á la EF mas paralela que la CB.

Si el ángulo BCA no se contiene exactamente en el recto, de modo que $n = m +$ una fraccion, tomo una banda mas que las que indica el número entero m, siempre será el ángulo recto mayor que la banda total: luego partiendo el primero por n, y la segunda

Teorema XII.

65. *Por un punto dado* C (fig. 15) *se puede trazar una paralela á una recta dada* AB, pero solo puede hacerse pasar una.

Efectivamente, bájese desde el punto C una perpendicular CD á la recta AB, y de todas las rectas que se pueden tirar por el punto C, solo una será perpendicular á CD, y las demás oblícuas respecto á ella; la perpendicular á CD será paralela á AB (62 y 63), y las otras encontrarán á esta recta (64); luego por el punto C no se puede tirar mas que una paralela á AB.

Teorema XIII.

66. *Cuando dos rectas* AB, CD (fig. 13) *son paralelas, toda perpendicular* FG *á una de ellas* AB, *lo es tambien á la otra* CD.

Desde luego FG encontrará á CD, porque de otro modo le seria paralela, y habria por el punto F dos paralelas FG y AB á la CD, lo cual no puede ser (65): además, FG será perpendicular á CD, porque si no, seria oblícua respecto de ella, y recíprocamente CD seria oblícua á FG, y CD llegaria á encontrar á AB perpendicular á FG (64), lo que es absurdo, puesto que AB y CD son paralelas por hipótesis; luego FG es perpendicular á CD.

Teorema XIV.

67. *Dos rectas* AB y CD (fig. 16), *paralelas á una tercera* FG, *son paralelas entre sí.*

Porque si se levanta una perpendicular MN á la FG, lo será tambien á sus paralelas AB y CD (66); luego estas, siendo perpendiculares á una misma recta MN, serán paralelas (63).

Teorema XV.

68. *Dos paralelas* AB y CD (fig. 17) *están equidistantes en toda su longitud.*

Se trata de probar que dos puntos cualesquiera P y Q, de una de

---

por $m+1>n$, el cociente primero, que es BCA, será mayor que el segundo, que es BCEF; y la demostracion es la misma.

El defecto de esta demostracion consiste en que las bandas y los ángulos tienen diferentes límites, y por tanto no se pueden comparar. *(Nota del Traductor).*

ellas AB, están á la misma distancia de la otra CD. Bájense de los puntos P y Q las perpendiculares PR y QS sobre CD, y hagamos ver que son iguales (54). Para conseguirlo, bajo la MN perpendicular á CD, desde el punto medio M de la PQ; esta perpendicular MN lo será tambien á la AB (66), de modo que los ángulos en M serán rectos; por consiguiente, si doblamos la figura por la recta MN, las MB y ND se abatirán respectivamente sobre MA y NC, y por lo tanto, los puntos Q y S irán á caer sobre estas rectas; pero MQ= MP; luego el punto Q se colocará sobre el P. Mas los ángulos en P y Q son rectos, como tambien los en M; por consiguiente, como tienen ya comun el lado PM, por precision el lado QS tomará la direccion de PR, y el punto S irá tambien á caer sobre esta recta; de modo que, hallándose ya sobre NC, tendrá que colocarse forzosamente en el punto R, que es la interseccion de estas dos rectas. Tiene, pues, QS confundidos sus estremos con los de PR; luego estas dos rectas coinciden en toda su estension, y son, por consiguiente, iguales, lo cual demuestra el teorema.

69. Cuando dos rectas paralelas AB y CD (fig. 18) están cortadas por una tercera FK, forman con esta varios ángulos, que reciben nombres particulares.

Llámanse ÁNGULOS INTERNOS *los que tienen su abertura entre las rectas* AB *y* CD, *y* ESTERNOS *los que la tienen fuera de la faja comprendida entre ellas.* AGK es un ángulo interno; AGF es un esterno.

Dos ángulos internos ó esternos, situados á diferente lado de la secante FK, *y cuyos lados se dirijan en opuesto sentido respecto á la recta que une sus vértices, se llaman* ALTERNOS INTERNOS *ó* ALTERNOS ESTERNOS; AGK y FID son dos ángulos alternos internos. En primer lugar son internos, porque el uno está situado á la izquierda de la secante FK, y el otro á su derecha; finalmente, los lados GA y GK del primero están dirigidos evidentemente en sentido contrario al de los lados ID, IF del segundo, con respecto á la recta GI. FGB y CIK son ángulos alternos esternos.

Se da el nombre de ÁNGULOS CORRESPONDIENTES *á dos situados al mismo lado de la secante, y que tengan sus lados dirigidos en el mismo sentido:* tales son los FGB y FID.

TEOREMA XVI.

70. *Si dos paralelas* AB y CD *están cortadas por una secante* FK (figura 18):

1.° *Los ángulos alternos internos son iguales;*

2.° *Los ángulos alternos esternos lo son tambien;*

3.° *Los correspondientes tambien lo son*

4.° *Los internos del mismo lado de la secante son suplementarios;*

5.° *Los ángulos esternos del mismo lado de la secante tambien son suplementarios.*

1.° y 2.° Por el medio O de la parte GI de la secante comprendida entre las paralelas, tiremos la MN, paralela á AB, que tambien lo será á CD (67). Hagamos despues girar la parte FNK del plano alrededor del punto O, hasta que ON coincida con OM, y entonces caera OK sobre OF por la igualdad de los ángulos NOK y FOM (50), y como OI = OG, los puntos I y G de la parte FNK del plano se hallarán respectivamente en G y en I. Mas las rectas GB é ID no habrán dejado de ser paralelas á ON; luego actualmente lo serán á OM, y por consecuencia coincidirán respectivamente con IC y GA, pues de lo contrario habria dos paralelas á una recta OM por cualquiera de los puntos I ó G (65); luego los ángulos BGK y DIF cubrirán sus alternos internos FIC y AGK, así como los ángulos BGF y DIK cubrirán tambien á sus alternos esternos CIK y FGA. Se deduce, pues: 1.° que los ángulos alternos internos son iguales entre sí; y 2.° que tambien lo son entre sí los alternos esternos.

3.° Digo ahora, que los ángulos correspondientes, los AGK y CIK por ejemplo, son iguales. En efecto, el ángulo CIK es igual á FID, su opuesto por el vértice; pero este es igual á su alterno interno AGK; luego los dos ángulos AGK y CIK, iguales á un tercero FID, son iguales entre sí. Luego 3.° los ángulos correspondientes son iguales.

4.° Sean los dos ángulos internos AGK y CIF de un mismo lado de la secante. El ángulo CIF tiene por suplemento su adyacente FID (40); pero FID es igual á su alterno interno AGK; luego CIF tiene tambien por suplemento AGK. Luego 4.° los ángulos internos de un mismo lado de la secante son suplementarios.

5.° Consideremos, en fin, dos ángulos esternos AGF y CIK de un mismo lado de la secante. El último tiene por suplemento su adyacente CIF, y, por consiguiente, al AGF, que es correspondiente del CIF. Luego 5.° los ángulos esternos de un mismo lado de la secante son suplementarios.

Teorema XVII.

71. Recíprocamente, *dos rectas son paralelas cuando forman con una misma secante:*

1.° *Angulos alternos internos iguales;*

2.° *Angulos alternos esternos iguales;*

3.° *Angulos correspondientes iguales;*

4.° *Angulos internos del mismo lado, que sean suplementarios;*

5.° *Angulos esternos de un mismo lado, que sean suplementarios.*

Supóngase, por ejemplo, que los ángulos alternos internos AGK y DIF son iguales: digo que las rectas AB y CD son paralelas. En efecto, una paralela á la AB, tirada por el punto I, formará con IF por la derecha un ángulo igual al AGK, por ser alterno interno, y, por consiguiente, igual al DIF. Luego esta paralela coincidirá con CD; luego CD es paralela á AB.

Teorema XVIII.

72. *Dos ángulos son iguales cuando tienen sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido, ó en sentidos contrarios respecto á la línea que une sus vértices.*

Sean primeramente dos ángulos ABC, DFG (fig. 19), que tienen sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido. Prolonguemos la DF hasta su encuentro con CB en el punto I. Los dos angulos ABC, DIC son iguales, por correspondientes con respecto á las paralelas AB y DI y á la secante BC; pero DIC es tambien igual al DFG (70, 3.°); luego los dos ángulos ABC, DFG, iguales á un tercero DIC, son iguales entre sí.

Consideremos ahora los dos ángulos ABC, OFK, que tienen paralelos sus lados, pero dirigidos en sentidos contrarios. Estos dos ángulos son iguales, porque OFK es igual á DFG, su opuesto por el vértice, y acabamos de ver que este es igual al ABC.

Teorema XIX.

73. *Cuando dos ángulos* ABC, DFO (fig. 19) *tienen sus lados paralelos, y dos de ellos* AB *y* DF *están dirigidos en el mismo sentido y los otros dos* BC *y* FO *en sentidos contrarios, son suplementarios.*

En efecto, el ángulo DFO es suplemento de su adyacente DFG, y este es igual al ABC.

74. COROLARIO. *Dos ángulos que tienen los lados paralelos son iguales ó suplementarios.*

TEOREMA XX.

75. *Dos ángulos* ABC, DFG (fig. 20), *que tienen perpendiculares entre sí los lados* AB *y* DF, *así como los* BC *y* FG, *son iguales ó suplementarios.*

Tiremos por el punto B las perpendiculares BI y BK á las AB y BC, respectivamente: los dos ángulos IBK y ABC son evidentemente iguales por tener el mismo complemento KBA (47). Pero los ángulos IBK y DFG son iguales ó suplementarios, puesto que sus lados son paralelos (74); luego tambien los ángulos ABC y DFG son iguales ó suplementarios.

CAPÍTULO II.

DE LA CIRCUNFERENCIA.

§ I.—Propiedades generales de la circunferencia.

76. Hemos visto en el número 21 lo que se entiende bajo las denominaciones de *circunferencia*, *radio*, *diámetro* y *arco*.

Llamarémos CUERDA *ó* SUBTENDENTE *de un arco la recta que une sus estremos*. AB es la cuerda del arco AMB (fig. 21).

TEOREMA I.

77. *Dos circunferencias descritas con el mismo radio son iguales.*

Porque si se coloca el plano de la segunda circunferencia sobre el de la primera, de modo que sus dos centros formen un mismo punto, las dos circunferencias coincidirán; porque de lo contrario, no estarian sus puntos equidistantes del centro. *Los círculos de un mismo radio son, pues, tambien iguales* (21).

TEOREMA II.

78. *El diámetro es la mayor de las cuerdas que se pueden tirar desde un punto de la circunferencia á otro.*

Consideremos la cuerda AB y el diámetro AC, que parten de un mismo punto A de la circunferencia, y unamos el punto B con el centro O. La cuerda AB es evidentemente mas corta que la línea quebrada AOB, y como esta es igual á AC, porque una y otra son la suma de dos radios, la cuerda AB es mas corta que el diámetro AC.

Teorema III.

79. *Todo diámetro divide á la circunferencia en dos partes iguales.*

Con efecto, si se dobla la figura á lo largo del diámetro AC, es preciso que todos los puntos del arco ANC vengan á colocarse sobre los de ADC, pues de lo contrario no estarian todos los puntos de la circunferencia igualmente distantes del centro O, porque en el movimiento del arco ANC su distancia á dicho centro no ha podido variar.

Teorema IV.

80. *Tres puntos* A, B, C (fig. 22), *que no estén en línea recta, determinan una circunferencia.*

Hay que demostrar que por estos tres puntos se puede hacer pasar una circunferencia, pero solamente una.

Para conseguirlo, uno el punto B con los A y C; despues levanto por los medios de estas rectas las perpendiculares respectivas DE y FG, y digo que estas perpendiculares se encontrarán. En efecto, si no se encontrasen serian paralelas (63); luego AB, que es perpendicular á DE, lo seria tambien á FG (66); y como BC es ya perpendicular á FG, habria dos perpendiculares AB y BC, bajadas desde el mismo punto B á una recta FG, lo cual es absurdo (51), porque no estando en línea recta los tres puntos A, B, C, las AB y BC son dos rectas diferentes; de modo que DE y FG se encuentran en cierto punto O, y como este punto pertenece á la perpendicular DE levantada en la mitad de AB, está igualmente distante de sus estremos A y B (59); y perteneciendo tambien á FG, está equidistante de B y de C; luego las tres distancias OA, OB y OC son iguales : por consiguiente, la circunferencia descrita desde el punto O, como centro, con el radio OA, pasará por los tres puntos A, B, C.

Téngase presente que la perpendicular levantada en el medio de AC debe pasar por el punto de seccion O de las otras dos (60).

Conclúyese de aquí, que siempre se puede describir una circunferencia por tres puntos no situados en línea recta. Digo además que solo se puede hacer pasar una.

Supongamos que pueda pasar otra por los tres puntos A, B, C. Su centro estaria precisamente sobre la perpendicular DE, pues de otro modo no distaria igualmente de los puntos A y B (59); por la misma razon debe hallarse sobre la perpendicular FG; luego no puede estar mas que en su punto de seccion O y la segunda circunferencia tendrá el mismo centro y radio que la primera, y coincidirá con ella. Por consiguiente, solo hay una circunferencia que pueda pasar por tres puntos A, B, C; luego tres puntos, no en línea recta, determinan una circunferencia.

81. Escolio. Si los tres puntos A, B, C estuviesen en línea recta, las dos perpendiculares DE y FG serian paralelas (62), y no se encontrarian. Pero hemos probado hace poco que el centro de la circunferencia que pase por los tres puntos A, B, C, debe hallarse á la vez sobre las dos perpendiculares DE y FG; luego *es imposible que una circunferencia pueda quedar cortada en mas de dos puntos por una línea recta;* y, en efecto, si esto fuese posible, uniendo tres de estos puntos con el centro resultarian tres rectas iguales, tiradas desde un punto á una recta, lo que es absurdo (58).

Teorema V.

82. *La perpendicular* OM (fig. 23), *bajada desde el centro de una circunferencia á una cuerda* AB, *divide á esta cuerda y á los arcos que subtiende en dos partes iguales.*

Tírense los radios OA y OB, que, siendo iguales y oblícuos respecto de AB (21 y 51), se apartarán igualmente del pié I de la perpendicular OM (57); luego este pié es el medio de AB.

Por lo tanto, doblando la figura á lo largo del diámetro M′OM, las dos semi-circunferencias se cubrirán recíprocamente; pero á causa de la igualdad de los ángulos OIB y OIA, el lado IB debe colocarse sobre el IA; y como IB=IA, el punto B caerá sobre el A; y así, confundiéndose los arcos BM y AM, y los BM′ y AM′, serán iguales.

83. Escolio. *La perpendicular bajada desde el centro de un círculo sobre una cuerda, satisface á las cinco condiciones siguientes: 1.ª pasa por el centro; 2.ª es perpendicular á la cuerda; 3.ª pasa por su medio; 4.ª y 5.ª pasa por los medios de los dos arcos subtendidos por dicha cuerda;* y como hemos visto en los números 10 y 51, que dos cualesquiera de estas condiciones bastan para determinar una recta, *toda la que satisfaga á dos de ellas satisfará tambien á las otras tres:* por ejemplo, *la* perpendicular *levantada en el* medio *de una cuerda,* *pasa por el* CENTRO *y por los* MEDIOS *de los arcos subtendidos por dicha cuerda.*

84. *Una cuerda prolongada indefinidamente se llama* SECANTE. Así CABF es una secante (fig. 24).

Concibiendo que la secante CABF gira alrededor de uno de los puntos en que corta á la circunferencia, alrededor de A por ejemplo, su otro punto de interseccion B llegará á coincidir con el primero, y entonces se dice que la secante CF se ha convertido en *tangente*. Por lo tanto, *la* TANGENTE *á una circunferencia en un punto dado es el límite hácia el cual tiende la direccion de una secante que se hace girar alrededor de dicho punto, hasta que el segundo de interseccion llegue á coincidir con el primero.*

TEOREMA VI.

85. *La tangente* TT′ *en un punto cualquiera* A *de una circunferencia es perpendicular al radio* OA *que pasa por el punto de contacto* A (fig. 24).

Tiremos por el punto A una secante cualquiera CABF, y cuando esta gire alrededor del punto A, la recta OI, que une el centro con el punto medio de la cuerda interceptada por la circunferencia, girará tambien alrededor de este centro, permaneciendo siempre perpendicular á la secante (83); luego en el límite, es decir, cuando la secante se haya convertido en la tangente TT′, esta recta de union será todavía perpendicular á dicha tangente; pero entonces el medio de la cuerda será el mismo punto A: luego, etc.

86. COROLARIO I. *La tangente solo tiene un punto comun con la circunferencia*; porque todo punto de esta recta, que no sea el de contacto, está fuera de dicha curva, porque su distancia al centro es mayor que el radio (53).

87. COROLARIO II. *Toda recta* CAF *distinta de la tangente* TAT′, *tirada por el punto de contacto* A, *es una secante.* Efectivamente: como esta recta es oblícua respecto de OA (37); si desde el centro se baja una perpendicular OI sobre FC, dicha perpendicular será diferente de OA, y por lo mismo menor que ella; luego el punto I es interior á la circunferencia.

TEOREMA VII.

88. Recíprocamente, *toda perpendicular* TAT′, *levantada en el estremo* A *de un radio* OA, *es tangente á la circunferencia* (fig. 24).

Si en el punto A tiramos una tangente á la circunferencia, será perpendicular al radio OA (85) y coincidirá con TAT′ (51) : luego TAT′ es tangente á la circunferencia.

89. Corolario. *Toda recta que no tiene mas que un punto comun con una circunferencia es una tangente:* porque la recta que una este punto con el centro será la mas corta que se pueda tirar desde el centro á la recta de que se trata; luego es perpendicular á esta (55), y por consiguiente, esta recta es tangente.

Teorema VIII.

90. *Dos paralelas interceptan en la circunferencia arcos iguales* (figura 25).

Pueden ocurrir tres casos, segun que ambas paralelas sean secantes, una secante y otra tangente, ó ambas tangentes.

1.° Sean secantes las dos paralelas AB y CD; digo que los arcos AC y DB son iguales. Bajo desde el centro O la perpendicular OI á la AB, y siéndolo tambien á su paralela CD, el punto I será el medio de los arcos AIB y CID (82): y por ser AI=IB y CI=ID, el arco AC, diferencia entre los AI é IC, es igual al arco DB, diferencia entre los IB é ID, que son iguales respectivamente á los primeros.

2.° Sean las paralelas la secante AB y la tangente TT′. Uniendo el centro O con el punto I de contacto, la recta OI es perpendicular á TT′ (85), y por consiguiente, á su paralela AB; luego el punto I es el medio del arco AIB, y por lo mismo, los arcos AI é IB, interceptados por la cuerda AB y la tangente TT′, son iguales.

3.° Consideremos las dos tangentes TT′ y SS′. Tirando un diámetro que pase por el punto I, será perpendicular á TT′, y por lo mismo, á su paralela SS′; luego pasará por el punto K, en que esta segunda tangente encuentra á la circunferencia (51), y de consiguiente, IAK=IBK.

91. Escolio. La recíproca es fácil de demostrar; mas para que sea verdadera en el caso de dos cuerdas, es preciso que estas no se corten dentro del círculo.

Teorema IX.

92. *En el mismo círculo ó en círculos iguales* (fig. 26 y 27), 1.° *dos arcos iguales* AMB, CND *son subtendidos por cuerdas iguales* AB, CD

2.° *de dos arcos desiguales* AMB, CNF, *el mayor* CNF *está subtendido por la mayor cuerda* CF. (Cuando se hable del arco subtendido por una cuerda, se tratará siempre del menor de los dos que esta subtiende).

1.° Supongamos que los dos arcos iguales AMB, CND (fig. 26) pertenezcan á la misma circunferencia; y por el medio L del arco AC tiremos el diámetro LOQ. Si hacemos girar la semi-circunferencia LNQ alrededor de LQ hasta que se abata sobre LMQ, es claro que estas dos semi-circunferencias coincidirán perfectamente, porque de lo contrario habria en ellas puntos desigualmente distantes del centro: luego el punto C se abatirá en A; y como el arco CND es igual al AMB, el punto D caerá tambien sobre B: por consiguiente, teniendo las dos cuerdas CD y AB confundidos sus estremos, coincidirán en toda su estension, y serán iguales.

2.° Supongamos que los arcos AMB, CNF (fig. 27) pertenezcan á dos circunferencias iguales. Tiremos los diámetros AG y CK, y llevemos la segunda circunferencia sobre la primera, y haciendo coincidir estos diámetros, ellas coincidirán enteramente; pero como CNF $>$ AMB, el punto F se colocará en F′ entre B y G, y la cuerda CF tomará la posicion AF′. Unamos el punto O con los F′ y B, y el radio OB cortará á AF′ entre A y F′ (lo que espresa que CNE $>$ AMB); y como las rectas AB y OF′ son respectivamente menores que las líneas quebradas $AI+IB$ y $OI+IF'$; es decir, como

$$AB < AI+IB,$$
$$OF' < OI+IF';$$

su suma es tambien menor que la de estas líneas quebradas; así resulta

$$AB+OF' < AI+IB+OI+IF';$$

y por ser $IB+OI=OB$, y $AI+IF'=AF'$;

$$AB+OF' < OB+AF';$$

y restando del primer miembro OF′ y del segundo su igual OB, resultará $AB < AF'$ ó $< CF$; lo que se debia demostrar.

Teorema X.

93. Recíprocamente, *en el mismo círculo ó en círculos iguales, dos cuerdas iguales* AB *y* CD *subtienden arcos iguales* AMB *y* CND, *y de*

dos cuerdas desiguales AB *y* CF, *la mayor* CF *subtiende el mayor arco* CNF (fig. 26).

1.° En efecto, si el arco AMB no fuese igual al CND, el mayor seria subtendido por cuerda mayor, y no seria AB = CD, como se ha supuesto.

2.° Si el arco CNF no es mayor que AMB, será igual ó menor que este; pero en el primer caso, la cuerda CF seria igual á AB, y en el segundo seria menor que ella, resultados contrarios á la hipótesis. Luego el arco CNF > AMB.

94. Escolio. Generalizando el método de demostracion que acabamos de emplear (93), establecerémos la siguiente regla, que tendrá algunas veces su aplicacion en la demostracion de las recíprocas.

Supóngase falso el principio que se quiere establecer, y háganse sucesivamente todas las hipótesis que le sean contrarias. Examínense las consecuencias que resultan de ellas, segun los teoremas precedentes; y si estas consecuencias no concuerdan con la hipótesis en que se apoya la recíproca que se demuestra, se deducirá que esta es verdadera.

Ya hemos empleado este método de demostracion en el n.° 57.

Teorema [illegible].

95. *En el mismo círculo ó en círculos iguales, dos cuerdas iguales* AB, CD *distan igualmente del centro; y de dos cuerdas desiguales* AB, CF, *la mayor* CF *es la mas próxima al centro* (fig. 26).

Supongamos las cuerdas trazadas en el mismo círculo, y bajemos desde el centro O las perpendiculares OG, OI, OK sobre las cuerdas respectivas AB, CD y CF, y vamos á probar que OG = OI, y que OK < OG (54).

1.° Empléese el mismo método de demostracion que en el primer párrafo del n.° 92, y del teorema del n.° 51 se concluirá la coincidencia de las dos perpendiculares OG y OI.

2.° Supuesto que la cuerda CF es mayor que AB, el arco CNF es mayor que AMB, y de consiguiente, se podrá tomar sobre el primero una *parte* CND igual á AMB. Únase C con D, y bájese sobre esta cuerda CD la perpendicular OI que corta á CF en H: resulta evidentemente que OK < OH, y como el punto I está mas distante del centro que el H, pues de lo contrario la cuerda CD no podria terminar en D sino cortando á la CF en otro punto que C, se tiene tambien que OH < OI; luego, con mas razon, OK es menor que OI; y como OI=OG, por ser iguales las cuerdas AB y CD, se deduce finalmente que OK<OG.

Teorema XII.

96. Recíprocamente, *en el mismo círculo ó en círculos iguales, dos cuerdas equidistantes del centro son iguales; y de dos cuerdas desigualmente distantes del centro, la mas cercana es la mayor.*

Aplíquese la regla del n.° **94**.

§ II.—De las circunferencias tangentes y secantes.

97. Hemos visto que tres puntos que no estén situados en línea recta determinan una circunferencia; por consiguiente, dos circunferencias tienen á lo mas dos puntos comunes. *Dos circunferencias que se encuentran en dos puntos se llaman* SECANTES*; y* TANGENTES, *si tienen un solo punto comun.*

Teorema XIII.

98. *Cuando se cortan dos circunferencias, la recta que une sus centros es perpendicular á la cuerda comun en su medio.*

En efecto, si se levanta una perpendicular en el medio de esta cuerda AB (fig. 28), pasará por los dos centros O y O′ (83), y teniendo dos puntos comunes con la recta OO′ coincidirá con ella; luego OO′ es la misma perpendicular levantada en el medio de AB.

Teorema XIV.

99. *Cuando dos circunferencias son tangentes, el punto de contacto se halla sobre la recta que une los centros.*

Considerando, en efecto, dos circunferencias O y O′, que se cortan en los puntos A y B (fig. 28 y 29), y suponiendo que la segunda gire alrededor del punto fijo A, llegará un instante en que el segundo punto de interseccion B se una con el primero, y entonces ambas circunferencias serán tangentes. Pero la recta que une los centros no habrá dejado de ser perpendicular en su medio á la cuerda comun; y como dicha cuerda llega á reducirse al punto A, este ha de hallarse sobre la línea de los centros: luego, etc. [1].

---

[1] Si se quiere demostrar este teorema *à priori*, se dirá: Supóngase, si es posible, que el punto de contacto esté en M (fig. 30), fuera de la recta OO′ que une los centros

100. Escolio. El teorema precedente puede enunciarse de la manera que sigue:

Cuando dos circunferencias son tangentes esteriormente, la distancia de los centros es igual á la suma de sus radios; y cuando son tangentes interiormente, la distancia de sus centros es igual á la diferencia de sus radios (fig. 29).

En efecto, debiendo hallarse el punto de contacto A en la recta que une los centros (99), estará situado entre ambos, ó los dejará hácia el mismo lado; pero es evidente que en el primer caso, la distancia OO′ de los centros es igual á la suma de OA+O′A; y que, en el segundo, es igual á su diferencia OA—O′A.

Teorema XV.

101. Recíprocamente, *dos circunferencias son tangentes cuando tienen un punto comun A sobre la recta que une los centros* (fig. 29).

Considerarémos dos casos, segun que el punto comun A esté entre los centros O y O′, ó en la prolongacion de la recta que los une.

1.° Unamos los dos centros O y O′ con un punto cualquiera M de la circunferencia O′, y formarémos así la quebrada OMO′, que será mayor que la recta OAO′. Quitemos de la quebrada la recta MO′, y de OO′ la O′A=O′M, y quedará OM>OA; luego todos los puntos de la circunferencia O′ son, escepto A, esteriores á la circunferencia O; por lo tanto, estas dos circunferencias se tocan *esteriormente* en A.

2.° Unamos los centros O y O′ con un punto cualquiera M de la circunferencia O′, y como la recta OM es mas corta que la quebrada OO′M, ó que su igual OA, todos los puntos de la circunferencia O′ son, escepto el A, interiores á la O; luego estas dos circunferencias se tocan *interiormente* en A.

102. Escolio. Esta recíproca puede enunciarse diciendo:

Dos circunferencias son tangentes esteriormente, cuando la distancia de sus centros es igual á la suma de sus radios; y son tangentes

---

O y O′. Bajemos MA, perpendicular á OO′, y prolónguesela en una cantidad AM′=AM. Es claro que, de esta manera, la recta OO′ es perpendicular en el medio de MM′, y que así los centros O y O′ están igualmente distantes de sus estremos M y M′; luego las dos circunferencias pasarán tambien por el punto M′, y tendrán dos puntos comunes, lo que es contra el supuesto: luego el punto de contacto M no puede estar fuera de la recta OO′.

interiormente, cuando la distancia de sus centros es igual á la diferencia de sus radios (fig. 29).

1.° Supongamos que la distancia de los centros sea igual á la suma de los radios, y que OA sea uno de estos; el otro será necesariamente O'A, y las dos circunferencias pasarán por el punto A de la recta OO'; luego serán tangentes (101).

2.° Supóngase ahora que la distancia OO' de los centros sea igual á la diferencia de los radios, y entonces el mayor se compondrá del menor y de esta distancia; luego si OA es el mayor radio, O'A será necesariamente el menor, y las dos circunferencias pasarán entonces por el punto A de la recta OO', y serán tangentes (101).

103. Corolario. De esta proposicion y de la precedente se deduce (99 y 101) que *la recta indefinida* OA *es el lugar geométrico de los centros de todas las circunferencias tangentes á la* O *en el punto* A; y que si por este se tira una perpendicular TT' á OA, esta recta será una tangente comun á todas aquellas circunferencias. Pero cada una de estas envuelve á todas aquellas cuyos centros estén comprendidos entre el suyo y el punto A; luego van acercándose tanto mas á esta tangente, cuanto mayores son sus radios: de manera que *se puede considerar la tangente* TT' como su límite, es decir, *como una circunferencia cuyo radio es infinito.*

Teorema XVI.

104. *Para que dos circunferencias se corten, es necesario y suficiente que la distancia de sus centros sea menor que la suma de sus radios y mayor que su diferencia.*

Justifiquemos primeramente que estas dos condiciones son necesarias, y en seguida probarémos que son suficientes.

1.° Sean O y O' (fig. 28) los centros de dos circunferencias que se cortan: la recta OO' será perpendicular en el punto medio de la cuerda que une sus puntos de interseccion A y B, de modo que cada uno de estos puntos estará situado á distinto lado de esta recta; luego tirando OA y O'A, se tendrá

$$OO' < OA + O'A; \text{ y } OA < OO' + O'A,$$

que da

$$OO' > OA - O'A, \text{ suponiendo } OA > O'A.$$

De consiguiente, *cuando dos circunferencias se cortan, la distancia de los centros es menor que la suma de los radios y mayor que su dife-*

rencia. Luego estas dos condiciones son *necesarias* para que haya interseccion.

2.° Son *suficientes*. Quedará demostrado en probando que las dos circunferencias no pueden ser, ni *esteriores*, ni *tangentes*, ni *interiores* una á otra.

Si fuesen esteriores (fig. 31), la recta que fuese desde el centro O al centro O′ cortaria á la primera circunferencia en A, saldria luego de ella y encontraria en seguida á la segunda en A′, de modo que se tendria

$$OO' = OA + AA' + A'O';$$

de modo que *la distancia de los centros seria mayor que la suma de los radios*, siendo así que la suponemos menor.

Si las dos circunferencias fuesen tangentes, la distancia de los centros seria igual á la suma ó á la diferencia de sus radios (100), y suponemos que no es así.

Si una de las circunferencias fuese interior á la otra (fig. 32), la recta que, desde el centro O fuese al centro O′, encontraria primero á la segunda circunferencia en A′, para en seguida salir de ella y encontrar á la primera en A; luego se verificaria que

$$OA = OO' + O'A' + A'A;$$

luego el radio mayor seria mayor que la suma del menor y de la distancia de los centros, ó lo que viene á ser lo mismo, *la distancia de los centros seria menor que la diferencia de los radios*, cuando suponemos lo contrario. Por lo tanto, las dos circunferencias no pueden ser, ni esteriores, ni tangentes, ni interiores una á otra; luego se cortan.

105. Escolio. *Cuando se ignore cuál de los dos radios es el mayor, será necesario verificar que cada radio es menor que la suma del otro y de la distancia de los centros*, para tener seguridad de que la segunda condicion queda satisfecha.

§ III.—De la medida de los ángulos.

Teorema XVII.

106. *En una misma circunferencia ó en circunferencias iguales, los* ángulos en el centro *(se llaman así los que tienen su vértice en el centro)* AOB *y* COD (fig. 33), *que comprenden arcos iguales* AB *y* CD *entre sus lados, son iguales.*

Tírese el diámetro IK por el medio I del arco AC, y dóblese la figura á lo largo de este diámetro; es claro que de este modo el punto A vendrá á colocarse en C y el punto B en D, porque suponemos que el arco AB = CD : luego el ángulo AOB cubrirá exactamente al COD, y por consiguiente, estos ángulos serán iguales (34).

TEOREMA XVIII.

107. Recíprocamente, *en una misma circunferencia ó en circunferencias iguales, si dos ángulos en el centro* AOB *y* COD (fig. 33) *son iguales, los arcos* AB *y* CD *comprendidos entre sus lados tambien lo serán.*

Esta recíproca se demostrará imitando la demostracion de la proposicion directa.

108. COROLARIO. *Un ángulo recto cuyo vértice esté en el centro intercepta entre sus lados una cuarta parte de la circunferencia, ó sea un* CUADRANTE. Recíprocamente, *si un ángulo en el centro* AOB (figura 34) *comprende un cuadrante entre sus lados, será recto;* porque prolongando el lado AO, se formará un ángulo BOC = AOB, puesto que BC será necesariamente un cuadrante; luego estos dos ángulos son rectos.

TEOREMA XIX.

109. *En un mismo círculo ó en círculos iguales, dos ángulos en el centro* AOB, DCF (fig. 35 y 36) *son proporcionales á los arcos* AB, DF, *comprendidos entre sus lados;* es decir, que se tendrá la proporcion

$$\frac{AOB}{DCF} = \frac{AB}{DF}.$$

Pueden ocurrir dos casos, segun que los arcos AB y DF sean comensurables, ó que no lo sean.

1.° *Suponiendo que los arcos* AB *y* DF (fig. 35) *sean comensurables*, y que su comun medida esté contenida 8 veces en AB y 3 veces en DF, la relacion de estos dos arcos será $\frac{8}{3}$; pero si se juntan todos los puntos de division con los centros O y C, quedarán divididos los ángulos AOB y DCF, el primero en 8, y el segundo en 3 partes iguales; y como las del primero son iguales á las del segundo (106) (porque lo son las en que han quedado divididos los arcos AB y DF), se tiene que la relacion de AOB á DCF es tambien $\frac{8}{3}$; luego

$$\frac{AOB}{DCF} = \frac{AB}{DF}.$$

2.ª *Supongamos que los arcos* AB *y* DF (fig. 36) *sean incomensurables*. Divido el arco DF en un número cualquiera de partes iguales, y coloco una de estas partes sobre AB tantas veces como pueda estar contenida en esta, y sea BG el resto que se obtenga por este medio. Junto O con G, y como los arcos AG y DF son comensurables, se tendrá

$$\frac{AOG}{DCF}=\frac{AG}{DF}.$$

Pero el arco AG y el ángulo AOG son dos cantidades variables, que tienden respectivamente hácia el arco AB y hácia el ángulo AOB, á medida que el número de partes en que se haya dividido el arco DF sea mayor, porque el punto G podrá de este modo aproximarse al B tanto como se quiera: luego las razones variables $\frac{AOG}{DCF}$ y $\frac{AG}{DF}$ tienen por límites respectivos

$$\frac{AOB}{DCF} \text{ y } \frac{AB}{DF},$$

y como estas razones variables son constantemente iguales, sus límites lo serán tambien *(Arit.*, 237); luego

$$\frac{AOB}{DCF}=\frac{AB}{DF};$$

que es lo que se necesitaba demostrar.

TEOREMA XX.

110. *Un ángulo tiene por medida el arco comprendido entre sus lados y descrito desde su vértice como centro.*

Medir un ángulo es buscar la relacion que tenga con otro que se haya tomado por unidad: luego si A (fig. 37) es el ángulo que hay que medir, y D la unidad angular, la medida del ángulo A será la razon de A á D. Pero acabamos de ver que dos ángulos son proporcionales á los arcos comprendidos entre sus lados y descritos con radios iguales haciendo centro en sus vértices; luego si de los puntos A y D como centros y con la misma abertura de compás describimos los arcos B y C, la razon $\frac{A}{D}$ será la misma que la $\frac{B}{C}$, y por consiguiente, esta última será la medida del ángulo A. Ahora bien; *si se conviene* en tomar el arco C como unidad de arco, la razon $\frac{B}{C}$ será la medida del arco B; luego *la medida del arco* B *será tambien la del ángulo* A, lo que se enuncia diciendo que *un ángulo tiene por medida el arco comprendido entre sus lados y descrito desde su vértice como centro.*

111. Escolio. Observarémos, sin embargo, que es menester no tomar este enunciado al pié de la letra, porque es completamente inexacto, atendido á que solo pueden compararse entre sí cantidades homogéneas, mientras que un ángulo y un arco son de especie esencialmente distinta. Mas cuando se dice que un ángulo tiene por medida el arco comprendido entre sus lados y descrito desde su vértice como centro, debe entenderse que *el número abstracto que espresa la medida del ángulo*, *es el mismo que espresa la medida del arco comprendido entre sus lados*, *tomando por unidad de arco el descrito con el mismo radio entre los lados de la unidad angular.*

112. Ordinariamente se toma el ángulo recto por unidad angular, y por consiguiente, el cuadrante por unidad de arco; de aquí se sigue que *para tener en este caso la medida de un ángulo*, *hay que buscar la relacion del arco comprendido entre sus lados y descrito desde su vértice como centro con el cuadrante de la circunferencia de que hace parte*, lo cual no puede ofrecer dificultad, una vez que bastará aplicar á estos dos arcos el método del número 25 y el cálculo del 26.

113. Para valuar con facilidad en la práctica de las artes la relacion de un arco dado con el cuadrante de la circunferencia á que pertenece, se ha convenido en dividir esta en 400 partes iguales, que se llaman *grados*, y se designan por la letra ^{G}; de modo que el cuadrante (^{c}) contiene 100^{G}. Cada grado se subdivide en cien partes tambien iguales, llamadas *minutos* ($'$), y el minuto en otras ciento, que se llaman *segundos* ($''$). De aquí se deduce que el grado es la *centésima* parte de un cuadrante; que el minuto es la *centésima* parte del grado, y por lo tanto, la *diezmilésima* del cuadrante; y en fin, que siendo el segundo la centésima parte del minuto, es la *millonésima* del cuadrante; de suerte que un número cualquiera de grados, minutos y segundos, puede siempre espresarse en fraccion decimal del cuadrante. Por ejemplo, un arco de $145^{G}\ 82'\ 36''$ equivale á $1^{c},458236$; porque $100^{G}=1^{c}$; 45^{G} son las 45 centésimas del cuadrante; $82'=0^{c},0082$, y $36''=0^{c},000036$. Luego un ángulo que comprende entre sus lados un arco de $145^{G}\ 82'\ 36''$ vale $1^{R},458236$; es decir, un ángulo recto, mas las cuatrocientas cincuenta y ocho mil doscientas treinta y seis millonésimas partes de otro recto. De consiguiente, ***para obtener la medida de un ángulo, bastará valuar el arco comprendido entre sus lados en fraccion decimal del cuadrante, y esta fraccion, considerando que espresa partes de ángulo recto, será la medida que se pide.***

114. Antes de que se estableciese el *sistema métrico decimal*, se dividia la circunferencia en 360 partes iguales llamadas tambien grados (^{0}), de manera que el cuadrante contenia 90^{0}; cada grado de estos se subdividia en 60 partes iguales, que se llamaban minutos, y el minuto en 60 segundos. Para tener en este sistema la medida de un ángulo, es necesario tomar la razon que hay entre el número de grados y partes de grado contenidos en el arco que le corresponde y 90^{0}. Para conseguirlo se reducen, tanto el arco, como 90^{0}, á unidades de la especie ínfima de las que aquel contiene, y se toma la razon de los dos *números abstractos* que resulten. Por ejemplo, si el ángulo que hay que medir intercepta entre sus lados un arco de $36^{0}\ 54'\ 45''$, se reducirá este arco á segundos, lo que dará $132885''$; se hallará igualmente que $90^{0} = 324000''$, de modo que el ángulo dado es los $\frac{132885}{324000} = \frac{2953}{7200}$ de un ángulo recto.

115. Esta division de la circunferencia en 360 partes iguales presenta ventajas que la hacen preferible á la nueva en muchas circunstancias. Consiste la principal en la propiedad que tiene el número 360 de descomponerse en mayor número de factores que el 100 : así, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{15}$, etc., de la circunferencia, valen respectivamente 180^{0}, 120^{0}, 90^{0}, 72^{0}, 60^{0}, 40^{0}, 36^{0}, 30^{0}, 24^{0}, etc.

116. Es muy fácil reducir un número cualquiera de grados y partes de grado de la division centesimal á los correspondientes en la sexagesimal, y al contrario. En efecto, una vez que en aquella el cuadrante se divide en 100^{G}, y en esta en 90^{0}, se ve que $1^{G} = \frac{9}{10}$ de 1^{0}, y que $1^{0} = \frac{10}{9}$ de 1^{G}.

Segun esto, si se quiere reducir $101^{G},6695$ á grados sexagesimales, minutos y segundos, no habrá mas que tomar los $\frac{9}{10}$ de este número, lo que se hará restando de él su décima parte, y despues reducir sucesivamente las fracciones decimales de grados y minutos de la division centesimal á minutos y segundos sexagesimales, multiplicándolos por 60. Se dispondrá el cálculo de este modo :

$$\begin{array}{r} 101^G,6695 \\ \underline{10\ ,16695} \\ 91^0,50255 \\ 30',15300 \\ 9'',18000 \end{array}$$

y tendrémos que $101^G,6695$ valen $91^0\ 30'\ 9'',18$.

Si se quisiese ahora valuar $91^0\ 30'\ 9'',18$ sexagesimales en grados centesimales, se empezaria por reducir los segundos á fraccion decimal de minuto, dividiéndolos por 60, despues los minutos á fraccion decimal de grado, dividiendo tambien por 60, y de este modo se hallará que $91^0\ 30'\ 9'',18$ valen sucesivamente $91^0\ 30',153$ y $91^0,50255$. Para convertir ahora este último número á grados centesimales, habrá que tomar los $\frac{10}{9}$, ó lo que viene á ser lo mismo, aumentarle su novena parte. Así, se hará el cálculo siguiente:

$$\begin{array}{r} 91^0,50255 \\ \underline{10\ ,16695} \\ 101^G,66950 \end{array}$$ que era el número primitivo.

Teorema XXI.

117. ***Todo ángulo* INSCRITO *(se llama así el que está formado por dos cuerdas que se cortan sobre la circunferencia) tiene por medida la mitad del arco comprendido entre sus lados.***

Distinguirémos tres casos, segun que el centro esté en uno de los lados del ángulo; que esté dentro; ó que esté fuera de este.

1.° Sea el ángulo BAC (fig. 38), cuyo lado AC pasa por el centro O. Si tiramos el diámetro IK paralelo á AB, formarémos el ángulo IOC igual á BAC su correspondiente, con respecto á las paralelas AB é IO cortadas por la secante AC; pero el ángulo en el centro IOC tiene por medida el arco IC comprendido entre sus lados; luego el ángulo BAC tambien tiene por medida el arco IC. Pero el arco IC es igual á AK; porque aquel corresponde al ángulo IOC, y este al AOK (50 y 107); por otra parte, el arco AK es igual á BI, porque ambos están comprendidos entre las cuerdas paralelas AB é IK (90); luego los dos arcos IC y BI, iguales á un tercero AK, son iguales; por consiguiente, IC es mitad del arco BC, y por esto dirémos que el ángulo BAC tiene por medida la mitad del arco BC comprendido entre sus lados.

2.° Consideremos el ángulo BAD que comprende el centro entre sus lados. Si tiramos el diámetro AC, le descompondrémos en los dos ángulos BAC y CAD, de modo que tendrá por medida la suma de las medidas de estos ángulos. Mas, segun lo que acabamos de ver, los ángulos BAC y CAD tienen respectivamente por medida la mitad de BC y la mitad de CD; luego el ángulo BAD tiene por medida $\frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}CD$; es decir, la mitad de BCD.

3.° Sea, por último, el ángulo FAB al cual es esterior el centro. Tiro tambien el diámetro AC, y formo así los dos ángulos FAC y BAC, cuya diferencia es precisamente el ángulo propuesto FAB, por lo que la medida de este será la diferencia de las de aquellos. Pero los ángulos FAC y BAC, de los que uno de los lados pasa por el centro, tienen respectivamente por medida la mitad de FC y la mitad de BC; luego el ángulo FAB tiene por medida $\frac{1}{2}FC - \frac{1}{2}BC$; esto es, la mitad de FB.

118. Corolario I. *Todos los ángulos* ABC, ADC, AFC, *inscritos en un mismo arco* ABC (fig. 39) (esto es, que tienen sus vértices colocados sobre este arco, y cuyos lados pasan por sus estremidades A y C) *son iguales*, porque todos tienen por medida la mitad del mismo arco AMC comprendido entre sus lados.

119. Corolario II. *Todo ángulo* DOF (fig. 50) *inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto*: porque tiene por medida la mitad del arco DMF comprendido entre sus lados; es decir, un cuadrante (108).

Teorema XXII.

120. *El ángulo* BAT (fig. 38), *formado por una cuerda y por la tangente en una de sus estremidades, tiene por medida la mitad del arco* BMA *comprendido entre sus lados.*

En efecto, si se concibe que la cuerda AD, que supondrémos prolongada indefinidamente, gire alrededor del punto A, de modo que tienda á salir de la circunferencia, el punto D se aproximará sin cesar al A, y el ángulo BAD no dejará por eso de tener por medida la mitad del arco BCD comprendido entre sus lados; luego en su límite, esto es, cuando el punto D haya venido á reunirse con el A, ó en otros términos, cuando la secante AD haya venido á convertirse en la tangente AT, el ángulo respectivo BAT tendrá aun por medida la mitad del arco BMA comprendido entre sus lados [1].

---

[1] Este teorema se puede tambien demostrar directamente por este método: Tírese por el punto de contacto A el diámetro AC, y descompondrémos así el ángulo BAT en los

Teorema XXIII.

121. *El ángulo* D'AB (fig. 38), *formado por una cuerda* AB *y por la prolongacion de otra* AF, *tiene por medida la semi-suma de los arcos* FNA *y* AMB, *subtendidos por estas cuerdas.*

La suma de los ángulos adyacentes BAD' y FAB vale dos rectos; luego la suma de sus medidas es una semi-circunferencia. Pero el ángulo inscrito FAB tiene por medida la mitad del arco FB comprendido entre sus lados; de consiguiente, restando esta mitad de una semi-circunferencia, se tendrá la medida del ángulo BAD'. Pero restar $\frac{1}{2}$ FB de una semi-circunferencia, viene á ser evidentemente lo mismo que restar FB de la circunferencia entera, y tomar la mitad del resto FNAMB; luego el ángulo BAD' tiene por medida $\frac{1}{2}$ FNAMB; es decir, la semi-suma de los arcos FNA y AMB.

Teorema XXIV.

122. *El ángulo* ABC (fig. 40), *cuyo vértice está colocado entre el centro y la circunferencia, tiene por medida la semi-suma de los arcos* AC *y* DF *comprendidos entre sus lados y entre sus prolongaciones.*

Si tiramos por el punto F la paralela FI al lado BC, formarémos el ángulo inscrito AFI, igual al ABC; por lo que el ángulo ABC tendrá por medida la mitad de ACI (117); esto es, la mitad de AC, mas la mitad de CI. Pero como CI = DF (90), el ángulo ABC tendrá por medida la mitad de AC mas la mitad de DF; que es lo que se queria demostrar.

Teorema XXV.

123. *El ángulo* ABC (fig. 41), *cuyo vértice está situado fuera de la circunferencia, tiene por medida la semi-diferencia de los arcos cóncavo* AC *y convexo* DF *comprendidos entre sus lados.*

Tiremos por el punto F la paralela FI al lado BC, y formarémos el ángulo inscrito AFI igual á ABC; por lo tanto, este ángulo ABC tendrá por medida la mitad del arco AI comprendido entre los dos lados de AFI, ó lo que es lo mismo, la semi-diferencia de los arcos

dos BAC y CAT; luego tendrá por medida la suma de las de estos. Pero CAT, que es recto (85), tiene por medida un cuadrante (110), es decir, la mitad de la semi-circunferencia AMC; el ángulo inscrito BAC tiene por medida la mitad del arco BC comprendido entre sus lados; por consiguiente, el ángulo BAT tiene por medida $\frac{1}{2}$ AMC + $\frac{1}{2}$ BC, esto es, $\frac{1}{2}$ del arco AMB, que interceptan sus lados.

AC y CI. Pero como CI = DF, el ángulo ABC tiene por medida la semi-diferencia de los arcos AC y DF, que es lo que se queria demostrar.

124. Hemos visto que un ángulo en el centro tiene por medida el arco comprendido entre sus lados, y se puede preguntar si es verdadera la recíproca de esta proposicion; esto es, *si de que un ángulo tenga por medida el arco cóncavo* AMC (fig. 42) *comprendido entre sus lados, se puede deducir que este ángulo tenga su vértice en el centro.*

El principio que hemos establecido en el número **94**, nos conducirá á la solucion de esta cuestion. Efectivamente, si el ángulo de que se trata no tiene su vértice en el centro, le tendrá por precision, ó fuera de la circunferencia, ó sobre esta, ó entre esta curva y el centro. En el primer caso su medida será menor que la mitad de AMC (**123**), y en el segundo seria precisamente la mitad de AMC (**117**); luego las dos primeras hipótesis son inadmisibles. Pues entonces, si el vértice del ángulo está entre el centro y la circunferencia, dicho ángulo tendrá por medida la mitad del arco AMC comprendido entre sus lados, mas la mitad del arco comprendido entre sus prolongaciones (**122**); luego bastará, para que tenga por medida el arco AMC, que el comprendido entre las prolongaciones de sus lados sea igual á AMC; por consiguiente, si se toma un arco *cualquiera* DNF igual á AMC, y se tira las cuerdas *transversales* AF y DC, se formará un ángulo ABC, que tendrá por medida el arco AMC comprendido entre sus lados, y cuyo vértice no estará en el centro; y como se ve que hay una infinidad de ángulos que gozan de esta propiedad, *la recíproca del teorema* XX *es falsa.*

Teorema XXVI.

125. *Todo ángulo que tiene por medida la mitad del arco cóncavo* AMC (fig. 39), *comprendido entre sus lados, tiene colocado su vértice sobre la parte restante de la circunferencia.*

Esta proposicion es la recíproca de la del número **117**, y se demostrará segun la regla del número **94**.

126. Corolario. Síguese de esto, que si se hiciera mover á un ángulo ABC sobre un plano, de modo que sus dos lados pasaran constantemente por dos puntos fijos A y C de este plano, su vértice describiria un arco de círculo tal, que todos los ángulos que se pudiesen inscribir en él serian iguales al B.

127. ESCOLIO. Obsérvese que si el ángulo B fuera recto, el arco de que se trata seria una semi-circunferencia (108). Luego *el lugar geométrico de los vértices de todos los ángulos rectos, cuyos lados pasan por dos puntos dados, es una circunferencia cuyo diámetro es la recta que une estos dos puntos.*

CAPÍTULO III.

PROBLEMAS SOBRE LA LÍNEA RECTA Y LA CIRCUNFERENCIA.

PROBLEMA I.

128. *Tirar una línea recta por dos puntos dados.*

Cuando la línea que se quiere trazar haya de tener una longitud poco considerable, como las que se pueden tirar en el papel, se hace uso de un instrumento llamado *regla*, que consiste en una hoja delgada de madera ó metal, cuyas caras sean bien planas y los bordes opuestos bien rectos y paralelos. Para trazar con la regla una línea recta entre dos puntos dados en un plano (estos puntos están representados por dos señales hechas con una punta muy fina), se aplica la regla sobre este plano, de modo que una de sus aristas pase á igual distancia de los dos puntos, y tan cerca de cada uno de ellos, que solo diste el espesor de la punta del lápiz con que se ha de trazar la recta, y despues se hace resbalar dicho lápiz desde un punto al otro y á lo largo de la regla, teniendo siempre cuidado de mantener esta en una posicion invariable.

129. Este procedimiento exige que la regla que se use esté perfectamente rectificada. Para asegurarse de ello, es el medio mas sencillo colocarla de modo que nuestro ojo quede en la prolongacion de la arista que se quiere rectificar, y esta arista no debe aparecer entonces mas que como un solo punto, porque la luz se propaga desde un punto á otro siguiendo la recta que los une.

Tambien se puede comprobar una regla muy fácilmente del modo que sigue. Trácese con una de sus aristas RS una línea CD (fig. 43) sobre un plano, y márquense dos puntos R y S sobre esta línea; despues, volviendo la regla del lado R′S′ sin cambiar sus dos estremos, de modo que la cara que estaba debajo quede ahora encima, y *vice-versa*, tírese á lo largo de la misma arista una segunda línea por los puntos R y S. Si la regla es *buena*, deben coincidir las dos líneas que se han trazado; si es *defectuosa*, cada una de ellas se apartará de la recta RS, pero en sentido inverso, á causa de la inversion de la regla, y el error se podrá distinguir fácilmente.

130. Si la línea ha de ser algo larga, como sucede cuando se quiere trazar, por ejemplo, un paseo en un jardin, se estiende entre los dos puntos dados una cuerda por medio de piquetes, y esta cuerda toma *sensiblemente* la forma de la línea recta que los une. Digo sensiblemente, porque se demuestra en la estática que es imposible estender un hilo rigorosamente en línea recta, á menos que su direccion no sea la vertical, ó que esté apoyado en un plano que le impida encorvarse; pero que se encorva tanto menos, cuanto mas considerable es la tension que esperimenta. Así, pues, estendiendo fuertemente sobre un plano una cuerda impregnada de antemano en cualquier sustancia colorante, se la levantará por la parte media teniendo fijos los estremos, y abandonándola de repente á su tension, de modo que vuelva á caer *á plomo* sobre el plano, trazará en él la línea recta pedida. Este es el procedimiento que usan los carpinteros.

131. Si hubiese que trazar una línea recta demasiado larga en un terreno, como si, por ejemplo, se tratase de abrir un camino, ó marcar la direccion de un canal, basta fijar un cierto número de puntos de esta línea; y para esto se plantan en los dos puntos dados A y B (fig. 44) dos jalones [1] bien verticales, de lo que nos asegurarémos comparando su direccion con la del hilo de una plomada; despues, colocándose próximamente á un metro de uno de ellos A, se hace plantar otros jalones en diversos puntos C, D, E,.... de modo que, mirando con un solo ojo, el primer jalon A cubra á la hilera de todos los demás. Entonces todos los puntos C, D, E,..... estarán en la recta AB.

En efecto, se sabe que la direccion de la *gravedad*, es decir, de esta fuerza desconocida que hace descender los cuerpos hácia la tierra cuando quedan abandonados á sí mismos, es la del hilo de una plomada que está en equilibrio. Esta direccion de la gravedad, ó del hilo de plomada, se llama en el lugar en que se la considera, la *vertical* de aquel lugar; para dos posiciones, tales como A y B, cuya distancia es muy pequeña relativamente á las dimensiones del globo,

[1] Un jalon es un liston de madera bien recto, de 2 metros próximamente de longitud, provisto en una de sus estremidades de un regaton, para introducirle en el terreno con facilidad.

las verticales concurren en un mismo punto del interior de la tierra, y determinan (19) un plano, que contiene tambien las verticales tiradas por las posiciones intermedias C, D, E,....: luego la interseccion de este plano con la superficie del terreno, que supondrémos sea plana, es una línea recta que pasa por los pies A, C, D, E,..... B de todos los jalones.

Problema II.

132. *Medir una recta dada.*

Cuando se tiene que medir una recta en la práctica de las artes, se evitan de la siguiente manera las operaciones y los cálculos de los números 24 y 25. Para esto, se empieza por dividir la unidad lineal en un gran número de partes iguales, por ejemplo, en 10, ó en 100, ó en 1000; despues se lleva esta unidad sobre la línea que se quiere medir, tantas veces como se pueda, y en seguida la porcion restante de línea se lleva sobre la unidad. Esta doble operacion hace conocer cuántas unidades y décimas, centésimas ó milésimas contiene la recta dada, y por consiguiente, cuál es su longitud. De esta manera, con un metro dividido en mil partes puede tenerse la medida de una recta con menos de un milímetro de error, y aun con menos de medio milímetro. Porque si despues de haber llevado el metro CD sobre la longitud AB (fig. 5) que hay que medir, y obtenido que cabe en ella dos veces, se lleva el resto FB sobre CD á partir del punto C numerado con cero, y cae su estremidad entre las 267.ª y 268.ª divisiones, pero mas cerca de la última que de la primera, se tomará los 268 milímetros por valor aproximado de FB, y se dirá, por lo tanto, que AB vale $2^{m},268$ con un error de menos de medio milímetro.

133. En aquellas artes que necesiten gran exactitud, no es suficiente la aproximacion que precede, y hay que recurrir entonces á un instrumento llamado *vernier* (1), con el que se consigue una mucho mayor. Consiste en una regla VV′ movible á lo largo de otra CD (fig. 45), de cuyas partes se quiera apreciar una fraccion. Está dividida tambien en partes iguales, pero menores que las de CD, de modo que 9 divisiones de esta valgan tanto como 10 del vernier VV′;

(1) Por el nombre del geómetra francés que lo inventó.

Nota. Se cree que el verdadero inventor fué el español Nuñez, y así otros llaman á este instrumento *Nonius*. (*El T.*)

por consiguiente, una division de este será los $\frac{9}{10}$ de una de aquella. Así es que, haciendo coincidir el cero del vernier con una division cualquiera A de la regla, las 1, 2, 3, 4,.... de aquel quedarán retrasadas de la que siga en esta en $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$,.... respectivamente, de manera que la estremidad V′ del vernier coincidirá con la 9.ª division de la regla, á contar desde A. Luego corriendo el vernier contra la regla, de modo que su n^{ma} division venga á coincidir con la siguiente de esta, cada una de sus dos estremidades habrá avanzado n décimas una division de la regla. De modo *que cada estremidad del vernier pasa tantas décimas mas á la derecha de una division de la regla de la division precedente de la regla, como indique el número de la línea divisoria del vernier que coincida con una de las líneas de division de la regla.*

Segun esto, para valuar la parte restante FB de la línea AB (fig. 5), se la llevará de C á K sobre la unidad lineal CD (fig. 45 *bis*), y se correrá una de las estremidades del vernier, por ejemplo el cero, hasta que coincida con el punto K, el cual, segun vemos, cae entre las divisiones 269.ª y 270.ª; y por tener lugar la coincidencia en la línea que marca la division 5.ª del vernier, se deduce que su cero rebasa $\frac{5}{10}$ de una division de la regla, ó sean $\frac{1}{2}$ de milímetro, á la division 269.ª de CD. Luego $FB = 269^{mm},5$.

Cuando ninguna de las divisiones del vernier coincida con las de la regla, se toma como número de coincidencia aquel de la division del primero que mas se aproxime á una de las de esta. Por ejemplo, si las líneas de division n.ºs 6 y 7 del vernier están comprendidas entre dos consecutivas de la regla, pero la 6.ª está mas próxima á su correspondiente que la 7.ª, tomarémos los $\frac{6}{10}$ de milímetro como cantidad que el cero del vernier se separa de la division precedente de la regla, y el error no llegará á media décima de una division de la regla; pues corriendo el vernier á la derecha lo bastante para que las divisiones 6.ª y 7.ª quedasen equidistantes de las de la regla que las comprenden, solo indicaria entonces 6 $\frac{1}{2}$ décimas de una division; luego en el caso que nos ocupa, el cero no rebasa 6$\frac{1}{2}$ décimas á la division precedente.

Es claro que se obtendria mayor exactitud, si el vernier contuviese mas divisiones de la regla, porque entonces las suyas se diferenciarian en menos de las de esta, y seria menor el paso de una coincidencia á otra.

Supongamos, en efecto, que v divisiones del vernier valgan $(v-1)$ de la regla, una del primero valdrá

$$\frac{v-1}{v}=1-\frac{1}{v}$$

de esta; de modo que la cantidad que el vernier anda para la coincidencia de sus respectivas divisiones, es la v^{ma} parte de una division de la regla; cantidad tanto menor, cuanto mayor sea v: luego el vernier será tanto mas sensible, cuanto mayor número de partes de la regla contenga. Pero aunque en *teoría* es susceptible de dar una aproximacion infinita, está limitada en la *práctica* por la dificultad de observar con exactitud en cuál division del vernier se verifica la coincidencia, aun empleando un lente; y esta dificultad aumenta á medida que las partes del vernier se diferencian menos de las de la regla. Por esta razon solo se ha podido llevar la aproximacion de la medida de longitudes, por medio de este instrumento, hasta un *cincuentavo* de milímetro.

134. Si hubiera que medir una distancia sobre el terreno, se emplearia la *cadena métrica ó de agrimensor*, que se compone de 50 eslabones de alambre grueso de hierro, unidos de dos en dos por medio de un anillo. El largo de los eslabones y el de los anillos está calculado de modo que la distancia entre los centros de dos anillos consecutivos sea de 20 centímetros. De modo que la longitud total de la cadena representa un *decámetro*,

Con objeto de hacer mas cómoda la lectura de las fracciones del decámetro, son de cobre los anillos colocados de metro en metro; y el de enmedio lleva además, como marca distintiva, un pequeño apéndice de metal. Finalmente, para facilitar el uso de la cadena, cada una de las estremidades está provista de una argolla, cuya longitud está comprendida en los 20 centímetros del primer eslabon.

Para medir una recta con este instrumento, se empieza por colocar jalones (131) en sus dos estremidades y en diferentes puntos intermedios, á fin de marcar su direccion. En seguida, colocándose el medidor junto al primer jalon, sujeta en el punto de partida una de las argollas de la cadena, mientras que su *ayudante* avanza siguiendo la direccion de los jalones, y llevando cogida la otra argolla. Este, despues de haberse asegurado de que la cadena está completa y regularmente estendida, coloca con una mano la argolla á flor de tierra, y clava por dentro de la misma una aguja de hierro, que servirá de punto de partida para medir el segundo decámetro. Despues de la medida de este, el que dirija la operacion recoge la aguja, y cuando tenga ya en la mano las 10, que habia dado al ayudante, se las vuelve á dar, anotando en su cuaderno diez decámetros, ó como suele llamarse, *una tirada.*

El esfuerzo que constantemente se hace para estender la cadena, concluye por alargar los anillos y aun los eslabones; y por lo tanto, hay que rectificar frecuentemente su longitud, comparándola con una medida preparada de antemano para que sirva de patron.

Problema III.

135. *Describir una circunferencia.*

Cuando el radio de la circunferencia no es muy grande, se usa el *compás*. Está compuesto de dos piezas metálicas, que se llaman sus piernas, y terminan en punta por una de sus estremidades, estando unidas por la otra por medio de una charnela, que permite variar á voluntad su separacion. Una de las piernas tiene una parte movible que se puede reemplazar por otra que lleva un lápiz, ó por un tiralíneas.

Es claro que se describirá una circunferencia fijando sobre un plano una de las puntas de un compás abierto, y haciendo girar la otra alrededor de la primera, sin que se levante de sobre el plano.

Observemos que el rastro marcado en este por la pierna móvil, no es, rigorosamente hablando, una línea, porque tiene forzosamente ancho; pero se acercará tanto mas á serlo, cuanto mas fina sea la punta. Así, *la punta con que se trace una línea debe ser lo mas fina posible.*

136. Si el radio de la circunferencia que hay que describir es mayor que la separacion que permiten las dos piernas del compás, se emplea una regla provista en una de sus estremidades de una punta fija, y que puede moverse girando sobre una abrazadera de hierro que lleva otra punta. Esta abrazadera se fija sobre la regla con ayuda de un tornillo de presion, de modo que se puede así colocar las dos puntas á la distancia que se quiera, y dejar esta invariable.

137. En fin, si el radio de la circunferencia que se quiere describir es muy grande, se hace uso de una cuerda, en cuyas dos estremidades se forman dos pasadores de ella misma: por uno de estos se pasa una punta que se fija en el centro, y por el otro un lápiz. Es preciso cuidar de que la cuerda esté siempre tirante, é impedir á los pasadores que resbalen sobre las puntas, á fin de conseguir que el radio permanezca invariable.

PROBLEMA IV.

138. *Medir un ángulo dado.*

Hemos visto que esta cuestion se reduce á valuar el número de partes de cuadrante contenidas en un arco dado. En la práctica se resuelve por medio del *trasportador*, que es un semicírculo de cobre ó talco, cuya circunferencia está dividida en grados, sean sexagesimales ó centesimales, y algunas veces en medios grados. Si es de cobre el instrumento, la parte A'B'C' (fig. 46) está vaciada, y el centro indicado por un pequeño agujero O: otros dos abiertos en A' y C' dejan ver los dos estremos del diámetro AOC. El trasportador de talco no tiene necesidad de estos agujeros á causa de su trasparencia y solo tiene uno pequeño en el centro.

Si se quiere saber cuántos grados vale un arco MN (fig. 47) por ejemplo, se tirarán desde el centro O á sus estremidades dos rectas indefinidas; despues se colocará el diámetro AC de un trasportador dividido en 180 partes sobre el lado OM, de modo que el centro coincida exactamente con el del arco MN, y se verá por cuál division pasa el otro lado ON: el número de esta division indicará los grados de dicho arco; porque todos los comprendidos entre los lados del ángulo NOM deben ser del mismo número de grados; pues la relacion de cada uno de ellos al cuadrante de la circunferencia á que pertenezca, debe ser una cantidad constante, como medida de este ángulo (112).

Si el lado ON pasase entre dos trazos consecutivos de la division del limbo, se veria á cuál se aproximaba más, y el número á que correspondiese se tomaria por el de grados del arco, y *se tendria así el valor de este con un error de menos de medio grado.*

139. Muchas veces es insuficiente la aproximacion dada por el trasportador; y entonces se puede tener con mas precision el valor de un ángulo de la manera siguiente.

Entre un arco cualquiera y su cuerda, es claro que existe una relacion determinada; de suerte que el conocimiento de una de estas cantidades lleva consigo necesariamente el de la otra. Así, pues, se concibe que se haya podido construir una *tabla* que hiciese conocer, para un valor dado del radio, las cuerdas de todos los arcos, á partir desde *cero*, y creciendo de minuto en minuto, ó de segundo en segundo, hasta 90°. Esto es lo que se ha hecho, y al fin de esta obra se encontrará una tabla, que, para un radio igual á 100, da las cuerdas de todos los arcos en progresion aritmética cuya razon es 10′, que es bastante para la práctica.

Para medir un ángulo con ayuda de las *tablas de cuerdas*, se describirá entre sus lados un arco cuyo radio sea igual á cien unidades [1]; se medirá la cuerda de este arco, y buscándola en la tabla, se hallará escrito á su lado el valor del ángulo pedido. Si esta cuerda valiese, por ejemplo, $44^{mm},43$, se veria que este número se encuentra en la interseccion de la línea horizontal que comienza por 25°, y de la vertical que pasa por los 40′; por lo cual el ángulo vale 25° 40′.

Mas si la cuerda valiese $44^{mm},59$, se hallaria que el ángulo está comprendido entre 25° 40′ y 25° 50′. Para tenerle con mas aproximacion, se operará admitiendo el principio, que en la práctica es cierto, de que *las diferencias de las cuerdas son proporcionales á las de los arcos correspondientes* [2], y se establecerá la siguiente proporcion:

La razon de 28 centésimas (diferencia de las cuerdas de los arcos de 25° 40′ y de 25° 50′) á 16 centésimas (diferencia de la cuerda del arco 25° 40′ y la del arco desconocido) = la razon de 10′ (diferencia de los arcos 25° 40′ y 25° 50′) á x (diferencia entre el arco desconocido y el de 25° 40′).

De donde se saca $x=\frac{160'}{28}=6'$: por lo que el ángulo pedido vale $25^{\circ}\,40'+6'=25^{\circ}\,46'$.

Si es obtuso el ángulo dado, se buscará la medida de su suplemento, y no habrá mas que restar esta de 180°.

Problema V.

140. *Dividir una recta dada* AB (fig. 48) *en dos partes iguales por una perpendicular.*

La cuestion se reduce evidentemente (61) á buscar dos puntos igualmente distantes de los estremos A y B de la recta dada; por consiguiente, desde A como centro, y con una abertura de compás mayor que la mitad de AB, se describirán á ambos lados de esta línea dos arcos de círculo CD y C′D′: despues, haciendo centro

---

(1) Es ventajoso tomar por unidad el milímetro, porque en el comercio se encuentran, bajo el nombre de *reglas de Kutsch*, unos dobles decímetros muy bien divididos en milímetros.

(2) Este principio es análogo al que nos ha servido en la *Aritmética* (n.° [illegible]) para calcular el logaritmo de un número.

en B, y con la misma abertura de compás, se describirán igualmente dos nuevos arcos FG, F'G', que cortarán á los primeros en los puntos M y M', y estos puntos quedarán equidistantes de los A y B; luego la recta MM', que los une, es perpendicular en el medio de AB.

Los arcos CD y C'D' cortarán á los FG y F'G'; porque habiendo tomado una abertura de compás mayor que la mitad de AB, la suma de sus radios es mayor que esta recta, esto es, que la distancia de los centros; y como, por otra parte, estos radios son iguales, su diferencia es nula, y por lo mismo menor que esta distancia. Así es que las condiciones de interseccion (104) quedan satisfechas.

Hemos señalado á distinto lado de AB los dos puntos M y M' que determinan la perpendicular pedida, porque una recta que debe pasar por dos puntos, queda tanto mejor determinada, cuanto mas distantes se encuentran. En efecto, se concibe que no poniendo la arista de la regla exactamente á igual distancia de los dos puntos, la línea que se trace se desviará tanto mas de la recta pedida, cuanto mas cercanos se encuentren aquellos.

Problema VI.

141. *Por un punto* O *dado en la recta* AB *levantar una perpendicular á esta.*

Distinguirémos dos casos, segun que AB sea indefinida, ó que no se la pueda prolongar al otro lado del punto O.

1.° Es claro que si tomamos á los dos lados del punto O (fig. 49) las distancias iguales OC y OD, no habrá mas que levantar una perpendicular en el medio de CD, para lo cual bastará hallar un punto que esté equidistante de los C y D, porque O goza ya de está propiedad. Por consiguiente, haciendo centro primero en C y luego en D, con una abertura de compás mayor que CO, se describirán dos arcos que se cortarán en G, y quedará resuelto el problema tirando la GO.

2.° Haciendo centro en un punto cualquiera C, pero situado fuera de la recta (fig. 50), y con un radio igual á CO, descríbase una circunferencia: por el punto F, en que corte á AB, tírese el diámetro FCD, y uniendo O con D, se tendrá la perpendicular pedida (119).

Problema VII.

142. *Desde un punto* G, *situado fuera de una recta* AB, *bajar una perpendicular á esta.*

Tomando sobre la recta AB (fig. 51) un punto D cualquiera, y describiendo una circunferencia desde el G, como centro, con GD por radio, es claro que cortará á AB en un segundo punto C (56, 1.°), y el G quedará así á igual distancia de C y D: si marcamos, pues, un segundo punto G′, equidistante tambien de C y D (140), bastará unirle con el G para tener la perpendicular pedida.

Si AB no es bastante larga para que el arco descrito desde G como centro con GD por radio, pueda cortarla en un segundo punto, se tomará sobre esta línea uno cualquiera A (fig. 52), y desde los A y D, como centros, se describirán con los radios respectivos AG y GD dos arcos que se corten por debajo de AB en G′: de este modo los puntos A y D quedarán equidistantes de G y G′, de suerte que AB será perpendicular sobre GG′ (61), y recíprocamente.

143. Los dos últimos problemas que acabamos de resolver se presentan continuamente en la práctica de las artes, y principalmente en el dibujo lineal; por esto se ha tratado de hallar soluciones mas sencillas que las que acabamos de dar, y se ha llegado á conseguirlo por medio de la *escuadra*. Las hay de varias clases (fig. 53). La de carpintero y picapedrero se compone de dos reglas de hierro ó de madera, invariablemente unidas, y de modo que sus aristas se corten en ángulo recto. La de delineante es una pequeña plancha terminada por tres lados perfectamente rectos, de los que dos se cortan perpendicularmente.

Para tirar con la escuadra una perpendicular á una recta dada AB por un punto dado G (fig. 54), se coloca aquella de modo que uno de sus catetos PR coincida con la recta AB; despues, aplicando una regla ST á lo largo del lado PQ, opuesto al ángulo recto, se hará resbalar la escuadra contra dicha regla, hasta que el lado QR venga á pasar por el punto G, y la línea Q′ R′ será la perpendicular que se buscaba.

144. Este procedimiento seria exacto si la escuadra de que se hiciera uso fuese perfecta; mas como es muy difícil encontrar una buena, es menester comprobarla con mucho cuidado antes de servirse de ella. Para esto, tírese con la mayor exactitud una recta DEF en un plano cualquiera (fig. 55); colóquese en seguida el lado AB de la escuadra sobre EF, y trácese EG á lo largo de AC. Hecho esto, inviértase la escuadra de modo que AC venga á colocarse sobre ED, sin variar el vértice A de sobre el punto E: si el segundo lado AB cae exactamente sobre la línea anteriormente trazada EG, es prueba de que los ángulos GED y GEF son iguales entre sí, por serlo al BAC, y de que la escuadra es *exacta*. Pero si AB, en su nueva posicion, cae á izquierda ó derecha de EG, el doble de GEF (y por consiguiente de BAC) es menor ó mayor que dos ángulos rectos, y, por lo tanto, el BAC es agudo ú obtuso, y la escuadra *inexacta*.

145. Tambien se puede usar el trasportador para levantar perpendiculares, porque la recta que va desde el centro á la 90.ª division es perpendicular al diámetro.

146. Si hubiese que trazar una perpendicular en el terreno, y no hubiera de ser muy larga, se conseguiria por los métodos dados en los números **140**, **141** y **142**, empleando una cuerda en vez del compás; ó mejor aun, se atará á las estremidades de la recta, sobre cuyo medio se quiera levantar la perpendicular, una cuerda, en medio de la cual se habrá fijado una anilla; despues, estendiéndola por esta, vendrá á colocarse su medio en la perpendicular pedida. Repitiendo esta operacion al otro lado de la recta, se tendrá un segundo punto de la perpendicular, y quedará determinada su direccion.

Este mismo procedimiento se aplicaria en el caso en que la perpendicular debiese partir de un punto tomado sobre la recta dada ó fuera de ella.

PROBLEMA VIII.

147. *Por el punto* A *de la recta* AB (fig. 56), *tirar otra que forme con ella un ángulo igual á otro dado* C.

Desde el vértice del ángulo en C, y con un radio cualquiera, describo entre sus lados el arco MN; despues, desde A como centro, y con el mismo radio, describo á partir de AB el arco PQ, sobre el cual llevo desde P hasta D una abertura de compás igual á la cuerda del arco MN; uno A con D, y el ángulo DAB será igual al NCM, porque son dos ángulos en el centro que interceptan entre sus lados arcos iguales de circunferencias iguales (**106**).

148. Este problema tambien puede resolverse por medio del *trasportador;* pues bastará colocar su centro en A, haciendo coincidir el diámetro con la línea AB; despues, habiendo marcado con un lápiz sobre el plano la division del limbo que corresponda á la amplitud del ángulo dado, y quitando el trasportador, no faltará mas que unir por medio de una recta el punto A con el que se haya marcado.

Tambien se puede hacer uso de la *tabla de cuerdas* (**139**). Si quisiéramos formar en un punto dado un ángulo de 25° 46′, se describiria desde este punto, como centro, y con el decímetro por radio, un arco indefinido; luego calculariamos la cuerda de 25° 46′, la llevariamos sobre este arco, y uniendo su estremidad con el punto dado, se tendria el ángulo que se buscaba. Como el arco 25° 46′ no se halla en la tabla, se buscará en esta el de 25° 40′, y se hallara para su cuerda $44^{mm},43$; despues, tomando la diferencia (28 centésimas) entre las cuerdas de los arcos 25° 40′ y 25° 50′, se tendrá, como en Aritmética, núm. 297, la proporcion $\frac{10}{6}=\frac{28}{x}$, de donde se saca $x=17$ centésimas; luego la cuerda del arco de 25°46′ es igual á $44^{mm},43+0,17=44^{mm},60$.

Si el arco que se diese fuera mayor que 90°, se construiria sobre la prolongacion de la recta dada un ángulo cuya medida fuese el suplemento de este arco.

En fin, podrémos servirnos, para resolver este problema, de la *falsa escuadra*, como hemos visto anteriormente (35).

Problema IX.

149. *Dividir un ángulo dado* AOB *en dos partes iguales* (fig. 57).

Desde el vértice, como centro, y con un radio arbitrario AO, descríbase el arco AMB entre los lados del ángulo que se da; bájese luego desde el centro una perpendicular sobre la cuerda de este arco, y quedará resuelto el problema (82 ó 106).

De este modo se podrá dividir un ángulo en un número de partes iguales, que sea una potencia exacta de 2 (106).

150. Con el trasportador se puede tambien resolver este problema con rapidez.

Problema X.

151. *Por un punto dado* C, *tirar una paralela á una recta dada* AB (fig. 58).

Pueden darse varias soluciones, y entre ellas citarémos las siguientes:

1.° Tirando por el punto C una secante cualquiera CD, es claro que bastará formar en él con esta recta un ángulo igual á CDA, lo que no ofrece dificultad (147); mas como el radio de los arcos que hay que describir para hacer este ángulo es arbitrario, le elegirémos igual á CD, y podrémos así dispensarnos de trazar esta recta. Entonces desde el punto C como centro, y con el mayor radio posible, descríbase el arco DF á partir desde AB; haciendo despues centro en D, y con la misma abertura de compás, descríbase el arco CA; tómese en seguida el DG=CA, y juntando C con G, quedará resuelto el problema.

2.° Desde un punto D cualquiera de los de AB (fig. 59), y con DC por radio, se describirán los dos arcos CA y BF, terminado el primero en C, y el segundo indefinido sobre AB; tómese el arco BG=AC, y tirando la CG, quedará resuelto el problema (91).

3.° Colóquese sobre AB el lado mayor de una escuadra de delineante PRQ (fig. 60), y aplíquese una regla SR′ á lo largo de uno de sus catetos PR : manteniéndola invariable en esta disposicion, hágase resbalar la escuadra contra la regla hasta que su lado mayor pase por el punto C; entonces la línea CD, trazada á lo largo de P′Q′, será la paralela pedida; porque los ángulos R′P′Q′ y RPQ son evidentemente iguales y correspondientes.

152. Tambien el trasportador suministra medio de resolver esta cuestion. Uno el punto C con otro cualquiera D (fig. 58) de la recta AB; mido el ángulo CDA (128), y hago despues en C sobre la línea CD otro igual DCG (148).

Problema XI.

153. *Hacer pasar una circunferencia de circulo por tres puntos dados* A, B, C (fig. 22).

Únanse A con B y B con C, y levántense perpendiculares DE y FG sobre los puntos medios de estas rectas (140), y desde su punto de interseccion O como centro con OA por radio, descríbase una circunferencia, y esta será la pedida.

154. Escolio. *Para hallar el centro de un arco, tírense dos cuerdas cualesquiera, levántense perpendiculares en sus puntos medios, y el de su interseccion será el centro que se busca.*

Problema XII.

155. *Describir una circunferencia que toque á la recta* AB *en un punto* C, *y que pase además por el* D (fig. 61).

Como el lugar geométrico de los centros de todas las circunferencias tangentes á la recta AB en el punto C es la perpendicular FF′ levantada en este punto á dicha recta (85), el de la circunferencia pedida estará en FF′; y como tambien tiene que hallarse sobre la perpendicular GG′, levantada en el medio de CD (80, ú 83), estará en su interseccion O : por consiguiente, describiendo una circunferencia cuyo centro sea O y el radio OC, se habrá resuelto el problema (59 y 68).

No admite mas que una solucion, porque las dos rectas FF′ y GG′, no pudiendo cortarse mas que en un punto, solo nos dan un centro y un radio. No habria solucion si el punto D estuviese sobre la recta AB; porque entonces las dos perpendiculares FF′ y GG′ serian paralelas (63). En cualquier otro caso este problema seria posible.

Problema XIII.

156. *Describir sobre una recta dada* AB (fig. 62) *un arco* CAPAZ *de medir el ángulo dado* K; *es decir, tal que todos los ángulos inscritos en este arco y cuyos lados pasen por* A *y por* B *sean iguales al* K.

Suponiendo resuelto el problema, y que sea ACB el arco pedido, todos los ángulos inscritos en él y cuyos lados pasen por A y B tendrán por medida la mitad de la parte restante AMB de la circunferencia, y por lo tanto, esta mitad deberá ser la medida del ángulo dado K : luego haciendo en el punto B, y *por debajo* de AB, el ángulo ABD igual al K, tendrá por medida la mitad de AMB, y por consiguiente, BD será tangente á la circunferencia (117 y 120) : de modo que esta circunferencia debe pasar por el punto A y ser tangente á la recta BD en B; lo cual refiere este problema al anterior.

Por lo tanto, para resolverle se hará en el punto B, y por bajo de AB, un ángulo ABD igual á K (147); se levantará una perpendicular sobre el medio de AB, otra en el punto B sobre BD, y desde O, donde estas perpendiculares se cortan, con OB por radio se describirá una circunferencia; y el arco situado sobre AB resolverá el problema.

El inferior AMB es capaz de medir el suplemento del ángulo dado; porque la suma de los dos AMB y ACB tiene por medida la mitad de la circunferencia.

Si el ángulo dado K fuese recto, el arco pedido seria una semicircunferencia (119); y efectivamente la perpendicular levantada sobre BD en B coincide entonces con AB. Tambien resulta esto de la observacion que hicimos en el n.° 127.

Problema XIV.

157. *Por un punto* A *dado en el plano de una circunferencia, tirar una tangente á esta.*

Distinguirémos dos casos: que el punto dado esté sobre la circunferencia, ó que esté fuera de esta curva.

1.° Estando el punto A situado sobre la circunferencia (fig. 24), se le unirá con el centro, y la perpendicular levantada en el punto A al radio OA, será la tangente (88).

2.° Supongamos que A no esté sobre la circunferencia (fig. 63), y que AT sea la tangente que se busca. Uniendo O con T, el ángulo OTA será recto, y tendrá su vértice sobre la circunferencia cuyo diámetro sea OA (127), y como este vértice debe tambien hallarse sobre la circunferencia dada, estará en la comun interseccion de ambas. Así que, para resolver el problema, se tirará OA; sobre esta recta como diámetro se describirá una circunferencia, y uniendo el punto dado con los T y T′ en que esta corte á la dada, se tendrán las dos tangentes AT y AT′, que resuelven indistintamente el problema. En efecto, uniendo O con T y con T′, los ángulos OTA y OT′A serán rectos (119); luego cada una de las OT y OT′ es perpendicular á la estremidad de un radio, y por lo tanto, tangente á la circunferencia.

Discusion. Para que este problema sea posible, es necesario que la circunferencia ATOT′ encuentre á la dada, y el número de soluciones será el mismo que el de puntos que tengan comunes. Así es que pueden presentarse tres casos, que vamos á examinar sucesivamente.

1.er Caso. *Cuando el punto* A *es esterior á la circunferencia dada.* Entonces el radio OB es menor que OA, es decir, menor que la suma del otro radio AD y de la distancia OD de los centros; porque cada una de estas dos rectas es la mitad de OA. Por otra parte, este radio AD es menor que la distancia de los centros aumentada en OB; luego ya es la distancia de los centros mayor que la diferencia de los radios (105); es tambien menor que su suma, porque es igual á uno de ellos: por consiguiente, las dos circunferencias se cortarán (104), y habrá dos soluciones.

2.° Caso. *Cuando el punto* A *está sobre la circunferencia dada.* OB es entonces igual á OA, es decir, á la distancia de los centros aumentada con el otro radio; ó en otros términos, la distancia de los centros es igual á la diferencia de los radios; luego las dos circunferencias se tocan interiormente en el punto A (102), y solo hay una solucion.

3.er Caso. *Cuando el punto* A *es interior á la circunferencia dada.* Entonces OB es mayor que OA, es decir, mayor que la suma de la distancia de los centros y del otro radio; luego la circunferencia auxiliar es interior á la otra, y el problema imposible.

158. Corolario. Haciendo girar la parte inferior de la figura alrededor de OA como charnela, las dos semi-circunferencias AT'O y CT'B se confundirán exactamente con sus correspondientes superiores: el punto T' vendrá á caer á la vez sobre ATO y sobre BTC, y por lo tanto, en su punto comun T: luego *las dos tangentes* AT *y* AT' *son iguales*, y el ángulo TAO = T'AO; de modo que *la recta que une el punto de concurso de dos tangentes con el centro, divide al ángulo que ellas forman en dos partes iguales.*

159. Recíprocamente, dividiendo el ángulo TAT' de dos tangentes en dos partes iguales, la recta que verifique esta division pasará por el centro de la circunferencia, porque si no, uniendo este centro con el punto A, el ángulo TAT' quedaria dividido en dos partes iguales por dos rectas distintas, lo que es absurdo:

Luego *el lugar de los centros de todas las circunferencias tangentes á dos rectas dadas es la recta que divide en dos partes iguales el ángulo que ellas forman.*

160. Tambien se puede resolver el problema anterior del modo siguiente:

Descríbanse desde los puntos O y A, como centros (fig. 64), y con los respectivos radios 2OB y OA, dos circunferencias que se cortarán en los puntos I é I'; únase O con I y con I', y los T y T', en que las rectas OI y OI' encuentren á la circunferencia dada, serán los de contacto de las tangentes pedidas; de suerte que, uniendo A con T y T', quedará el problema resuelto. Efectivamente, los puntos T y A están equidistantes de O y de I; luego AT es perpendicular sobre OI (61), y esta recta una tangente (88).

Observemos que este método daria tambien el medio de resolver el problema, aun cuando no pudiera trazarse la circunferencia OB; porque despues de haber determinado el punto I, bastaria buscar otro equidistante de I y de O; y como la recta que le uniese con el punto A seria perpendicular en el medio de OI, quedaria por tangente á la circunferencia [1].

---

[1] Es una aplicacion del que se emplea para tirar una tangente á la elipse por un punto esterior, cuando se conoce su eje mayor y sus focos, como se verá mas adelante.

PROBLEMA XV.

161. *Describir una circunferencia que sea tangente á tres rectas indefinidas* PQ, RS *y* TU (fig. 65).

Hemos visto que el lugar de los centros de todas las circunferencias tangentes á dos rectas, es la bisectriz del ángulo que forman (159); luego dividiendo los ángulos en A en dos partes iguales por las DE y FG, el centro de la circunferencia pedida deberá hallarse en una ú otra de estas rectas. Por idéntica razon deberá tambien hallarse sobre alguna de las dos IK y LM, que dividen en dos partes iguales los ángulos en C; luego estará en uno de los puntos de interseccion con las dos primeras, es decir, en O, O′, O″ ú O‴; de modo que el problema tendrá cuatro soluciones. En efecto, bajemos, desde el punto O, por ejemplo, las perpendiculares OC′, OB′ y OA′ sobre las respectivas rectas RS, PQ y TU, y es evidente que doblando la figura por la línea OA, las PQ y RS se cubrirán, por ser iguales los ángulos SAO y QAO; por consiguiente, las perpendiculares OC′ y OB′ coincidirán tambien, pues si no se podrian bajar dos á una recta desde un mismo punto; luego son iguales. Igualmente veriamos que OB′ = OA′, de modo que, describiendo una circunferencia desde O como centro, y con OA′ por radio, será tangente á las tres rectas dadas.

Los otros tres puntos O′, O″ y O‴ son tambien los centros de tres circunferencias fáciles de describir, y que serán otras soluciones del problema.

Aunque no se ha hecho uso de los ángulos en B, no debe creerse que las rectas que los dividen en dos partes iguales den nuevas soluciones; porque siendo ellas el lugar de los centros de todas las circunferencias tangentes á RS y á TU, deberán pasar necesariamente, la una por los puntos O y O″, y la otra por los O′ y O‴.

Suponiendo que la recta RS, por ejemplo, gire alrededor del punto A, en el sentido que indica la flecha, caminando de derecha á izquierda, arrastrará en su movimiento á las GF y DE, de modo que cuando haya quedado paralela á TU, estas últimas lo serán respectivamente á IK y á LM (70, 3.°, y 71); entonces ya no existirán los centros O′ y O‴, y el problema solo admite en este caso dos soluciones (1).

---

(1) Es claro que al moverse la recta AE alrededor de A, el punto O′ se alejará cada vez

En fin, si las tres rectas fuesen paralelas, el problema seria evidentemente imposible.

PROBLEMA XVI.

162. *Tirar una tangente comun á dos circunferencias dadas.*

Este problema admite, en general, cuatro soluciones, á saber: dos tangentes *esteriores*, y dos *interiores*. Supongámosle resuelto, y que AB sea una tangente esterior (fig. 136): uniendo O con A y O′ con B, las rectas OA y O′B serán perpendiculares sobre dicha tangente; luego si por el centro O′ se tira la O′C paralela á AB, la parte AC determinada así sobre el radio AO será igual á O′B (68), de modo que OC será igual á la diferencia de los radios de las dos circunferencias; y como O′C es perpendicular sobre OA (66), es tangente á la circunferencia que se describa con el radio OC (88).

Descríbase, pues, una circunferencia desde el punto O como centro y con un radio OD igual á la diferencia de los radios de las dos circunferencias dadas; tírense desde O′ dos tangentes á esta circunferencia, y únase el centro O con los puntos de contacto C y C′, tirando, por último, tangentes en los puntos A y A′, en que estas rectas OC y OC′ van á cortar á la circunferencia O, se tendrán las dos tangentes esteriores AB y A′B′.

Del mismo modo se verá, que para hallar las dos internas será menester describir desde el centro O una circunferencia con un radio igual á la *suma* OG de los radios de las dos circunferencias dadas, y acabar la construccion como arriba.

Es fácil ver que las dos tangentes esteriores van á cortarse sobre la recta que une los centros, y que lo mismo sucede á las interiores.

PROBLEMA XVII.

163. *Describir una circunferencia que toque á otra dada* O (figura 66), *y que además sea tangente á una recta dada* AB *en un punto* C *tambien dado.*

---

mas del C, y al mismo tiempo el ángulo AO′C = O′AE′ (70, 1.°) disminuirá continuamente. Tambien se ve que el *límite* de la distancia O′C es el *infinito*, mientras que el del ángulo O′ será *cero*. Pero cuando se llegue á estos límites, la recta AE habrá quedado paralela á CM, porque jamás la encontrará. Así es que podemos decir que *dos rectas son paralelas cuando se encuentran á una distancia infinita, ó cuando forman un ángulo cero.*

Sea O′ el centro desconocido de la circunferencia que se pide, el cual se encontrará evidentemente sobre la perpendicular indefinida DD′, tirada á AB por el punto C. Ahora bien, si las dos circunferencias han de ser tangentes esteriormente, OO′ será la suma de los dos radios; por consiguiente, tomando CD, igual al radio de la circunferencia O, el centro O′ estará igualmente distante de los puntos D y O, de modo que se determinará por la interseccion de DD′ con la perpendicular FF′ levantada en medio de OD. Mas si las dos circunferencias hubiesen de tocarse interiormente, la distancia de sus centros seria igual á la diferencia de sus radios; y por lo tanto, si se toma CD′, igual al radio de la circunferencia O, el centro desconocido estará equidistante de los puntos O y D′, por lo que se hallará en la interseccion O″ de DD′ con la perpendicular GG′ levantada sobre el medio de OD′.

Se ve que el problema admite por lo general dos soluciones, si, como hemos supuesto, el punto C es esterior á la circunferencia dada. Sin embargo, si la recta AB fuese tangente á la circunferencia O, es claro que OD′ seria entonces paralela á esta recta (68), y el centro O″ se alejaria hasta el infinito (161, *nota*). En este caso, la circunferencia O″C degeneraria en la tangente AB (103).

Si el punto C fuese uno de los de interseccion de AB con la circunferencia O, CD y CD′ serian iguales á OC, y los puntos O′ y O″ coincidirian entonces con C; luego las circunferencias O′C y O″C se reducirian al punto C.

Si este es interior á la circunferencia O, siempre tiene lugar la construccion; pero las dos circunferencias quedan interiores á la dada.

Finalmente, si AB es tangente á la circunferencia O, y C su punto de contacto, el problema admite una infinidad de soluciones (103).

164. Problemas para resolver. 1.° *Describir una circunferencia que toque á dos rectas dadas, y á la una de ellas en un punto dado.*

2.° *Describir uua circunferencia que toque á otra dada en un punto dado, y que pase por un segundo punto tambien dado.—Deducir de la solucion de este problema la del número* 155.

3.° *Describir una circunferencia que toque á otra dada en un punto dado, y sea además tangente á una recta dada.*

4.° *Describir una circunferencia con un radio conocido, y que toque á la vez á una recta y á una circunferencia dadas.*

5.° *Por un punto dado en el plano de una circunferencia tirar una secante tal, que la cuerda interceptada sea igual á una recta dada.*

LIBRO SEGUNDO.

DE LOS POLIGONOS.

DEFINICIONES.

165. *Se llama* POLÍGONO *una porcion de plano terminada por todas partes por líneas rectas, que se llaman sus lados.*

166. Si una línea recta, de cualquier modo que se la trazara, no pudiese encontrar al *perímetro*, es decir, al contorno de un polígono, en mas de dos puntos, se dice que este es *convexo* ó de *ángulos salientes*, y en el caso contrario, que es *cóncavo* ó de *ángulos entrantes:* ABCDEF es un polígono convexo (fig. 68); y GHIKLMN es uno cóncavo. Los ángulos salientes de este son G, H, K, L, M; I y N los entrantes. Es necesario entender que el ángulo entrante I es toda la porcion del plano del polígono que el lado IK indefinidamente prolongado recorreria, si girase alrededor de I, para que su punto *k* viniese describiendo el arco *klh*, á caer en *h* sobre IH; de modo que este ángulo es igual á cuatro rectos menos el KIH.

Se llama *diagonal* la recta que une los vértices de dos ángulos no adyacentes; tales son las AD y MK.

Cuando hablemos de un polígono, se tratará siempre de uno convexo, á menos que espresamente no se diga lo contrario.

167. Se llama *polígono inscrito en un círculo* aquel cuyos ángulos tienen todos su vértice sobre la circunferencia; y se dice al mismo tiempo que el círculo está *circunscrito* á este polígono,

Un polígono está *circunscrito á un círculo* cuando todos sus lados son tangentes á la circunferencia, y entonces se dice que el círculo está *inscrito* en el polígono.

168. Se distingue á los polígonos por el número de sus lados ó de sus ángulos, que viene á ser lo mismo, y reciben nombres que designan precisamente el número de estos ángulos ó lados: así se llaman

Triángulos los polígonos de	3 lados.
Cuadriláteros.	4

Pentágonos.	5 lados.
Hexágonos.	6
Heptágonos.	7
Octógonos.	8
Eneágonos.	9
Decágonos.	10
Endecágonos.	11
Dodecágonos.	12
Etc.	

No se lleva generalmente esta nomenclatura mas allá de dodecágono, si no es para nombrar el *pentedecágono* ó polígono de quince lados.

169. Se concibe muy bien que dos figuras, por ejemplo un círculo y un triángulo, encierren entre sus lados porciones iguales de estension, sin que se las pueda superponer: se espresa esta cualidad diciendo que tales figuras son *equivalentes*; y se llaman *iguales* las que se pueden superponer.

Los triángulos y los cuadriláteros tienen propiedades particulares que vamos á estudiar desde luego, y en seguida verémos cuáles son las comunes á los polígonos de todos los órdenes.

CAPÍTULO PRIMERO.

TRIÁNGULOS.

Teorema I.

170. *La suma de los tres ángulos de un triángulo es igual á dos ángulos rectos.*

Para demostrarlo, prolongo el lado BC (fig. 67), y tiro por el punto C la recta CD paralela á AB. La suma de los tres ángulos del triángulo es igual á la de los tres ángulos formados alrededor del punto C; porque tienen comun el ángulo ACB, el A es igual al ACD, como alternos internos entre las paralelas AB y CD cortadas por la secante AC; y B es igual á DCF, como su correspondiente respecto á las mismas paralelas, siendo la secante BF. Pero la suma de los tres ángulos formados alrededor de C vale dos rectos; luego la de los tres ángulos del triángulo ABC vale otro tanto.

171. COROLARIO I. *Cada ángulo de un triángulo es el suplemento de la suma de los otros dos: así, cuando dos ángulos de un triángulo son respectivamente iguales á dos de otro, el tercer ángulo del primero es igual al tercero del segundo, y por consiguiente, los dos triángulos son equiángulos entre sí.*

172. COROLARIO II. *El ángulo* ESTERNO ACF *de un triángulo (se llama así el que está formado por un lado y la prolongacion de otro) es igual á la suma de los dos internos opuestos* A y B; porque esta suma de los A y B tiene por suplemento el ángulo ACB, que tambien lo es de ACF (40).

173. COROLARIO III. *Cuando en un triángulo hay un ángulo recto, ó uno obtuso, cada uno de los otros dos tiene que ser agudo.*

174. Este último corolario sugiere la idea de dividir los triángulos en tres clases, segun la naturaleza de sus ángulos. *Se llama triángulo* RECTÁNGULO *el que tiene un ángulo recto, é* HIPOTENUSA *el lado opuesto al ángulo recto:* ABC (fig. 69) es un triángulo rectángulo, y BC su hipotenusa. Es evidente que *en un triángulo rectángulo los dos ángulos agudos son complementarios.*

175. Se llama triángulo *acutángulo* aquel cuyos tres ángulos son agudos, como el ABC; y *obtusángulo* el que tiene un ángulo obtuso, como el DEF (fig. 70).

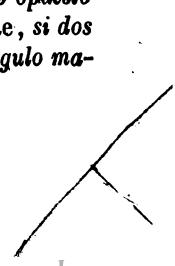
176. Tambien se clasifican los triángulos por las relaciones que existen entre sus lados, llamando *triángulo* ESCALENO *á aquel cuyos tres lados son desiguales*; ISÓSCELES *el que tiene dos lados iguales entre sí*, y en esta clase de triángulos el tercer lado se llama base, y vértice del mismo al opuesto á dicho lado.

De lo dicho en el núm. 61 se deduce que la recta que va desde el vértice de un triángulo isósceles al medio de su base, es perpendicular á esta; y como dicha recta se llama *la altura* del triángulo, puede decirse que el *triángulo isósceles queda determinado cuando se conoce su base y su altura.*

Por último, *se llama triángulo* EQUILÁTERO *ó* EQUILATERAL, *el que tiene sus tres lados iguales.*

TEOREMA II.

177. *Si dos lados de un triángulo son desiguales, el ángulo opuesto al mayor es mayor que el opuesto al menor;* y recíprocamente, *si dos ángulos de un triángulo son desiguales, el lado opuesto al ángulo mayor es mayor que el lado opuesto al menor.*



Suponiendo que el lado AC sea mayor que el AB (fig. 71), la perpendicular DE levantada en el punto medio de BC, cortará al lado AC en un punto comprendido entre A y C; pues si A quedase en dicha perpendicular, estaria tan distante de B como de C, y si quedara entre E y C, distaria menos de C que de B. Por consiguiente, el punto E, interseccion de la perpendicular levantada en D con el lado AC, quedará entre A y C, y uniéndole con B la recta BE estará precisamente dentro del ángulo ABC; y como en virtud de la demostracion del núm. 56 los ángulos EBC y ECB pueden superponerse, y demostrar así que son iguales, resulta que el ABC es mayor que el ECB.

Supongamos ahora que el ángulo ABC sea mayor que ACB. Si en el medio de CB se levanta una perpendicular y se une el punto B con el E en que esta encuentre á AC, el ángulo EBC así formado será igual á ACB, y por consiguiente, la recta EB estará trazada en el ángulo ABC; luego el punto E quedará entre A y C, y el A colocado á la izquierda de la perpendicular ED, por lo que AC será mayor que AB.

178. Corolario. En un triángulo rectángulo, la hipotenusa es el mayor de los tres lados, y en un obtusángulo lo es el opuesto al ángulo obtuso (173).

Teorema III.

179. *En un triángulo isósceles, los ángulos opuestos á los lados iguales tambien son iguales;* y recíprocamente, *si dos ángulos de un triángulo son iguales, lo serán los lados que les estén opuestos.*

Hágase uso del método de demostracion empleado en el núm. 94, apoyándose en el teorema del núm. 177.

180. Corolario. *Un triángulo equilátero es tambien equiángulo;* y recíprocamente.

Se ve tambien que cada uno de los ángulos del triángulo equilátero vale dos tercios de un recto; de modo que tendrá por medida un arco de 60°.

Teorema IV.

181. *Dos triángulos* ABC *y* A'B'C' (fig. 72) *son iguales cuando tienen un ángulo igual* B=B' *comprendido entre dos lados iguales respectivamente,* AB *á* A'B', *y* BC *á* B'C'.

Llevemos el triángulo A'B'C' sobre el ABC, colocando el punto sobre el B, y el C′ sobre el C, con lo cual el lado B′C′ coincidirá con su igual BC; y una vez que el ángulo B′ es igual al B, el lado A′B′ tomará la direccion AB; y como son iguales estos dos lados, el punto A′ caerá necesariamente sobre el A. El lado A′C′ tendrá de este modo los mismos estremos que AC; luego coincidirá con él; y cubriendo el triángulo A′B′C′ exactamente al ABC, será igual con él.

182. Corolario. Llamarémos *ángulos homólogos* á dos que estén opuestos á lados iguales; y *lados homólogos*, á los opuestos á ángulos iguales. Entendido esto, se sigue de la superposicion de los dos triángulos ABC y A′B′C′ que los ángulos B y C son respectivamente iguales á sus homólogos B′ y C′, y que el lado BC lo es á su homólogo B′C′; luego, *cuando dos triángulos sean iguales por tener un ángulo igual comprendido entre dos lados iguales uno á uno, se deberá deducir que sus partes homólogas son iguales.*

Teorema V.

183. *Dos triángulos* ABC *y* A′B′C′ (fig. 72) *son iguales cuando tienen un lado igual* AB=A′B′ *adyacente á dos ángulos iguales uno á uno*, A *á* A′, *y* B *á* B′.

Coloquemos el triángulo A′B′C′ sobre el ABC, poniendo los puntos A′ y B′ respectivamente sobre los A y B. El lado A′B′ coincidirá con su igual AB, y por ser el ángulo B′ igual al B, el lado B′C′ tomará la direccion BC, y el punto C′ tendrá que caer en alguno de los puntos de la recta indefinida BC. Igualmente, por ser el ángulo A′ igual al A, el lado A′C′ tomará la direccion AC, y el punto C′ irá tambien á caer sobre algun punto de la recta AC; luego debiendo hallarse á la vez este punto C′ sobre las dos rectas BC y AC, se hallará necesariamente en su punto de interseccion C: por consiguiente, el triángulo A′B′C′ cubrirá exactamente al ABC, y será igual con él.

184. Corolario I. *Cuando dos triángulos son iguales por tener un lado igual adyacente á dos ángulos iguales los del uno á los del otro, sus partes homólogas son iguales*, porque son superponibles, por serlo los triángulos.

185. Corolario II. *Dos triángulos son iguales cuando tienen un lado igual y dos ángulos cualesquiera del uno iguales á dos del otro*: porque en este caso serian equiángulos entre sí (171), y satisfarian, por lo tanto, á las condiciones enunciadas en el n.° 183.

186. Corolario III. *Dos triángulos rectángulos son iguales cuando tienen igual la hipotenusa y un ángulo agudo.*

TEOREMA VI

187. *Si dos triángulos* ABC, A'B'C' (fig. 73) *tienen dos lados del uno iguales respectivamente á dos del otro*, AB = A'B', *y* AC = A'C', *y el ángulo* A *comprendido entre los dos lados del primero es mayor que el* A' *comprendido entre los del segundo, el tercer lado* BC *del primer triángulo es mayor que el tercero* B'C' *del segundo.*

En efecto, llevo el triángulo A'B'C' sobre ABC, de modo que A'C' coincida con AC, y sea ACB'' la posicion que tome este triángulo. Divido el ángulo B''AB en dos partes iguales por la recta AI, y uno I con B''. Los dos triángulos BAI y B''AI serán iguales (181), y por consiguiente, B''I lo será á su homólogo BI. Pero siendo el ángulo CAB mayor que C'A'B', la recta AB'' estará necesariamente trazada en el ángulo CAB, y por lo tanto, la bisectriz AI del ángulo B''AB cortará á CB de tal modo, que CI+IB=CB. Mas la recta CB'' es mas corta que la quebrada CI+IB'', ó que su igual CI+IB; luego el lado CB'', es decir, C'B' es menor que CB.

TEOREMA VII.

188. Recíprocamente, *si dos triángulos* ABC, A'B'C' *tienen dos lados del uno iguales respectivamente á dos del otro,* AB=A'B', *y* AC=A'C', *y el tercer lado* BC *del primero es mayor que el tercero* B'C' *del segundo, el ángulo* A, *opuesto al tercer lado del primer triángulo, será mayor que su correspondiente* A' *del segundo.*

Para demostrar esta recíproca, se hará uso del principio establecido en el n.° 94, fundándose en los teoremas de los n.os 181 y 187.

TEOREMA VIII.

189. *Dos triángulos* ABC *y* A'B'C' (fig. 72) *son iguales cuando los tres lados del uno son respectivamente iguales á los del otro,* AB=A'B' AC=A'C', *y* BC=B'C'.

Basta, para demostrar esta proposicion, hacer ver que el ángulo A, por ejemplo, es igual á su homólogo A'; porque entonces los dos triángulos tendrán un ángulo igual comprendido entre dos lados respectivamente iguales, y lo serán por lo tanto. Ahora bien, si el ángulo A no fuese igual al A', seria mayor ó menor que él; si A es mayor que A', como los lados que le comprenden son respectivamente iguales á los de A′, deberá deducirse que BC es mayor que B′C′ (187), lo que es contra la hipótesis. Luego el ángulo A no es mayor que A′. Igualmente se probaria que no es menor que A′; luego será igual, y tambien lo serán los triángulos A′B′C′ y ABC.

Puede demostrarse esta proposicion del modo siguiente, que tiene la ventaja de ser independiente de los teoremas enunciados en los números 181 y 187.

Coloquemos el triángulo A′B′C′ bajo el ABC, de modo que los vértices B′ y C′ coincidan con sus homólogos B y C, y que A tome la posicion A″ con lo que serán BA″ = BA, y CA″ = CA. Cada uno de los puntos B y C quedará así equidistante de A y de A″, y por consiguiente, si se une A con A″, la recta BC será perpendicular en el medio de AA″ (61), luego si doblamos la figura por la línea BC, AI se abatirá sobre IA″ (37), y el punto A sobre el A″: de modo que los dos triángulos ABC y A″BC se cubrirán perfectamente y serán iguales. Mas BCA″ no es otra cosa que A′B′C′; luego ABC = A′B′C′.

190. Corolario. *Cuando dos triángulos son iguales por tener sus tres lados respectivamente iguales, debe deducirse que sus ángulos homólogos lo son tambien.*

191. Escolio. Consecuencia de lo precedente es que hay tres casos en que dos triángulos son iguales: los enunciados en los números 181, 183 y 189, y en cada uno de ellos se deduce que las partes homólogas de dichos triángulos son tambien iguales. Por lo cual, *siempre que se quiera establecer la igualdad de dos ángulos ó de dos rectas, bastará hacer ver que son partes homólogas de triángulos iguales.*

Teorema IX.

192. *Dos triángulos rectángulos son iguales cuando tienen iguales la hipotenusa y un cateto.*

Sea la hipotenusa BC = B′C′, y el cateto AC = A′C′ (fig. 74). Llevando el triángulo A′B′C′ sobre ABC, de modo que el punto A′ caiga sobre A, y C′ sobre C, A′C′ coincidirá con AC, A′B′ caerá sobre AB (38), y el punto B′ se hallará sobre alguno de los puntos de AB. Tendremos de esta manera, á partir de un mismo punto C, y á un mismo lado de la perpendicular CA, dos oblícuas iguales CB y C′B′ á una recta AB, que deben coincidir: así es que los triángulos ABC y A′B′C′ se cubren exactamente y son iguales.

CAPÍTULO II.

CUADRILATEROS.

193. Entre los cuadriláteros hay que distinguir el *trapecio*, el *paralelógramo*, el *rombo*, *rectángulo* y *cuadrado*.

194. Llámase *trapecio* un cuadrilátero ABCD (fig. 75), que tiene dos lados paralelos entre sí, y otros dos que no lo son.

Los lados paralelos AB y DC se llaman *sus bases*, y la perpendicular DE, bajada desde un punto cualquiera de una de las bases á la otra, *su altura*.

195. *El paralelógramo es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos*; tal es la figura 76.

Teorema I.

196. *Los lados opuestos* AB *y* CD, BC *y* AD (fig. 76) *de un paralelógramo* ABCD son iguales.

Tiremos la diagonal AC (fig. 76), y formarémos dos triángulos ABC y ACD iguales; porque el lado AC es comun á ambos, el ángulo ACD es igual al CAB, por alternos internos con relacion á las paralelas AB y CD, siendo la secante AC; igualmente ACB es igual á CAD, su alterno interno entre las paralelas CB y AD, siendo la misma la secante; luego los dos triángulos ABC y ACD tienen un lado igual adyacente á dos ángulos respectivamente iguales; luego ellos tambien lo son, é igualmente sus partes homólogas (184). Así es que el lado CB, que está opuesto al ángulo CAB, es igual al AD opuesto al ACD, y el lado AB será igual á su homólogo CD; por lo tanto, los lados opuestos de un paralelógramo son iguales.

197. Corolario. *Las partes de dos paralelas comprendidas entre otras dos paralelas son iguales.*

198. Escolio. *Los ángulos opuestos de un paralelógramo son iguales*; porque sus lados son paralelos y están dirigidos en sentido contrario.

Teorema II.

199. Recíprocamente, *si en un cuadrilátero* ABCD (fig. 76) *son iguales los lados opuestos* AB *y* CD, CB *y* AD, *la figura será un paralelógramo.*

Tirando la diagonal AC, formarémos los dos triángulos ABC y ACD, que serán iguales por serlo sus tres lados: sus ángulos homólogos tambien lo serán (190); y así, el CAB, opuesto al lado BC, será igual al ACD, opuesto al lado AD; pero estos ángulos son alternos internos respecto á las rectas AB y CD, y la secante AC: luego estas rectas serán paralelas (71). Por una razon semejante, AD es paralela á CB, y por consiguiente, el cuadrilátero ABCD es un paralelógramo (195).

200. Este teorema ha sugerido la idea de un instrumento muy cómodo para trazar paralelas. Se compone de dos reglas mayores, unidas á otras dos mas pequeñas por medio de dos pasadores de cobre que las atraviesan. Esta union es de tal manera, que los lados opuestos del cuadrilátero formado por los centros de los pasadores son iguales; de modo que este cuadrilátero es siempre un paralelógramo, y las dos reglas mayores quedan siempre paralelas, cualquiera que sea la distancia á que se coloque una de otra. Así es que, si se quiere tirar una paralela á una recta dada por un punto dado, se aplicará una de las aristas de una de las reglas sobre la recta dada, y se hará pasar una de las de la otra regla por el punto dado: solo falta entonces pasar una punta de lápiz á lo largo de esta arista para tener la paralela pedida.

Teorema III.

201. *Si los lados* AB y CD (fig. 76) *de un cuadrilátero son iguales y paralelos, la figura será un paralelógramo.*

Tiremos, lo mismo que antes, la diagonal AC, y los dos triángulos, que formarémos así, ABC y ACD, tendrán un ángulo igual comprendido entre dos lados respectivamente iguales; porque el lado AC es comun á los dos AB = CD, y por ser estos lados paralelos, los ángulos CAB y ACD son iguales como alternos internos; luego dichos triángulos son iguales, y tambien lo serán sus ángulos homólogos ACB y CAD; por lo tanto, las rectas CB y AD son paralelas (71), y el cuadrilátero ABCD un paralelógramo (195).

Teorema IV.

202. *Las diagonales de un paralelógramo se cortan mútuamente en dos partes iguales.*

Comparando los dos triángulos AOB y COD (fig. 76), se ve que el lado AB es igual al CD (196), que el ángulo OAB=OCD, y el OBA=ODC (70, 1.°); luego los dos triángulos AOB y COD son iguales (183), sus lados homólogos tambien lo serán, AO á OC y OB á OD; por consiguiente, las dos diagonales AC y BD se cortan mútuamente en partes iguales.

203. Escolio. Si por el punto O de interseccion de las dos diagonales se tira una secante cualquiera, las partes OI y OK, comprendidas entre el punto O y el perímetro del paralelógramo, serán iguales, porque los triángulos DOI y KOB lo son (183). Esta propiedad de que goza el punto O, hace que se le llame el *centro* de figura del paralelógramo. En general, *se llama centro de una línea ó de una superficie á un punto colocado de tal manera, que toda secante tirada por él encuentre á la línea ó á la superficie en puntos que le sean equidistantes.*

Teorema V.

204. *Dos paralelógramos son iguales cuando tienen un ángulo igual comprendido entre dos lados iguales respectivamente.*

Superponiendo estas dos figuras, se demostrará fácilmente este teorema.

205. En un paralelógramo y en un triángulo se llama *base* á uno cualquiera de sus lados, y *altura* á la perpendicular bajada sobre aquella desde un punto del lado opuesto en el paralelógramo, ó desde el vértice del ángulo opuesto en el triángulo. AB es la base del paralelógramo ABCD (fig. 76), y CE es su altura; y AB, CD y C son respectivamente la base, la altura y el vértice del triángulo ABC (fig. 77).

206. Si dos lados contíguos de un paralelógramo ABCD (fig. 78) son iguales, los otros dos tambien lo serán entre sí y á los primeros. Entonces la figura toma el nombre de *rombo; de modo que* ROMBO *es un cuadrilátero que tiene todos sus lados iguales.*

207. Dedúcese del núm. 199, que *el rombo es un paralelógramo*, y que, por lo mismo, *sus diagonales deben cortarse mútuamente en dos partes iguales* (202). Pero hay más, y es que son *perpendiculares una á otra;* porque los dos triángulos AOB y BOC tienen sus tres lados respectivamente iguales, y, por lo mismo, el ángulo AOB es igual á su homólogo BOC.

Tambien podria decirse que los vértices opuestos A y C equidistan de los B y D, y, por lo tanto, la diagonal que los une es perpendicular en el punto medio á la que pasa por estos dos (61), y recíprocamente.

208. Si fuera recto uno cualquiera de los ángulos de un paralelógramo (fig. 79), tambien su adyacente lo seria (70, 4.°); y como habian de ser iguales á sus opuestos (72), el paralelógramo tendria rectos sus cuatro ángulos: un paralelógramo de esta clase se llama *rectángulo*; de modo que el RECTÁNGULO *es un cuadrilátero cuyos ángulos son rectos.*

209. *Las diagonales de un rectángulo se cortan mútuamente en dos partes iguales* (202), *y además son iguales;* porque los triángulos ABC y ABD tienen un ángulo igual comprendido entre dos lados respectivamente iguales, y lo serán sus hipotenusas AC y BD.

210. Si dos lados contiguos de un rectángulo ABCD (fig. 80) son iguales, los otros dos tambien lo serán, y la figura se llamará entonces un *cuadrado. El* CUADRADO *es, pues, un cuadrilátero cuyos lados son iguales, y los ángulos rectos. Sus diagonales se cortan en dos partes iguales* (202) *perpendicularmente* (207) *y son iguales* (209).

211. Hemos visto que se puede hacer pasar una circunferencia por tres puntos que no estén en línea recta, y por consiguiente, por los vértices de un triángulo ABC (fig. 81); pero que no se puede hacer pasar sino una (80); luego un cuarto punto E, tomado al arbitrio sobre el plano de este triángulo, podrá ó no hallarse sobre la circunferencia de que se trata; por consiguiente, no todo cuadrilátero es inscribible en un círculo, y, con mayor razon, no lo será tampoco un polígono cualquiera de mayor número de lados. ¿Cuáles, pues, son las condiciones necesarias y suficientes para que un cuadrilátero sea inscribible?

TEOREMA VI.

212. *En todo cuadrilátero inscrito* ABCD, *la suma de los ángulos opuestos es igual á dos rectos*, y recíprocamente, *si dos ángulos opuestos* A *y* C *son suplementarios, el cuadrilátero es inscribible en el círculo* (figura 81).

1.° En el cuadrilátero inscrito ABCD, la suma de los dos ángulos opuestos A y C tiene por medida la semisuma de los arcos DCB y DAB; es decir, la mitad de la circunferencia; luego esta suma vale dos rectos.

2.° Sea ABCD un cuadrilátero en el cual los dos ángulos opuestos A y C sean suplementarios. Podemos siempre hacer pasar una circunferencia por los tres vértices B, A, D; y digo que pasará tambien por el cuarto C. En efecto, siendo los ángulos A y C suplementarios, su suma debe tener por medida la mitad de la circunferencia; y como el ángulo inscrito A tiene por medida la mitad del arco DMB, el C tendrá por medida la mitad del arco *cóncavo* restante DAB, comprendido entre sus lados (ninguno de los ángulos A y C es entrante (166), porque su suma vale dos rectos); luego su vértice está colocado sobre la circunferencia BADMB (125), y el cuadrilátero es inscribible.

213. Corolario I. *El rectángulo y el cuadrado son inscribibles.* Esto resulta tambien de los números 209 y 210, y aun del número 127.

214. Corolario II. *El romboide y el rombo no son inscribibles;* porque entonces la suma de sus ángulos opuestos seria igual á dos rectos, y, por consiguiente, como estos ángulos son iguales (198 y 207), serian rectos; luego, en lugar de un romboide ó un rombo, se tendria un rectángulo ó un cuadrado.

Teorema VII.

215. *En todo cuadrilátero* ABCD, *circunscrito á un círculo*, *la suma de dos lados opuestos* AB *y* CD *es igual á la de los otros dos* BC *y* AD, y recíprocamente, *todo cuadrilátero* [1] *es circunscribible cuando la suma de dos lados opuestos sea igual á la de los otros dos* (fig. 82 y 83).

1.° Sean F, G, I, K los puntos de contacto de los lados del cuadrilátero con la circunferencia, y se tendrá evidentemente.

$$AB = AF + FB = AK + BG \ (158),$$

y

$$CD = CI \pm ID = CG \pm DK.$$

Sumando estas igualdades miembro á miembro, resultará

$$AB + CD = BC + DA.$$

2.° Sea ABCD (fig. 82) un cuadrilátero en que

$$AB + CD = BC + DA,$$

---

[1] El autor limita esta recíproca al caso de ser *convexo* el polígono; pero como lo mismo se verifica, aunque sea cóncavo, he quitado esta limitacion. La construccion para demostrar esta recíproca en los cóncavos está en la fig. 83. (*Nota del T.*)

digo que es circunscribible á la circunferencia. Describamos, en efecto, una que sea tangente á las tres rectas AD, AB y BC (161); sea F su punto de contacto con AB, y O su centro. Bajo desde este centro OI perpendicular sobre DC, y digo que OI$=$OF. Si no fuese así, podríamos tomar sobre esta perpendicular una distancia OI'$=$OF, y tirando D'C' paralela á DC por el punto I', se formará un cuadrilátero ABC'D', que estará circunscrito á la circunferencia KGF, porque sus cuatro lados están equidistantes del centro O; y tendrémos (1.°)

$$AB+D'C'=BC'+AD'.$$

Pero por hipótesis

$$AB+DC=BC+AD;$$

luego, restando estas dos igualdades miembro á miembro, se hallará

$$DC-D'C'=DD'+CC',$$

ó añadiendo D'C' á los dos miembros,

$$DC=DD'+D'C'+CC',$$

lo que evidentemente es absurdo. Por lo tanto, OI no es distinto de OF, y la circunferencia KGF tendrá que ser tangente á los cuatro lados del cuadrilátero.

216. Corolario. El rombo y el cuadrado son circunscribibles al círculo, pero no lo son ni el romboide ni el rectángulo.

217. Escolio. Se sigue de los números **212** y **215**, que el rombo y el rectángulo no son al mismo tiempo inscribibles y circunscribibles al círculo; pero que el cuadrado sí goza de esta propiedad.

Se puede preguntar si además del cuadrado hay cuadriláteros que á la vez sean inscribibles y circunscribibles á un círculo; y para responder á esta pregunta, inscribo un cuadrilátero cualquiera ABCD (fig. 84) en un círculo, y habiendo dividido dos de sus ángulos adyacentes A y B en dos partes iguales cada uno por medio de las rectas AI y BI, bajo desde el punto de su interseccion I las perpendiculares IP é IK sobre los respectivos lados AB y CD. La primera IP medirá la distancia del punto I á los tres lados AD, AB y BC (161); luego, tomando IQ$=$IP, y tirando por el punto Q la C'D' paralela á CD, el cuadrilátero ABC'D' quedará circunscrito á la circunferencia que se describa desde el punto I como centro y con el radio IP. Digo que es tambien inscribible (**212**); porque siendo el ángulo C', por ejemplo, igual á su correspondiente C, es suplemento de su opuesto A.

CAPÍTULO III.

DE LOS POLÍGONOS EN GENERAL.

TEOREMA I.

218. *La suma de los ángulos interiores de todo polígono es igual á tantas veces dos rectos como lados tiene este menos dos.*

1.° Sea ABCDEF (fig. 68) un polígono convexo cualquiera. Si desde el vértice del ángulo A se tiran diagonales á los vértices de los demás ángulos no adyacentes á este, quedará dividido el polígono ABCDEF en tantos triángulos como lados haya menos dos; porque cada uno de los dos triángulos estremos ABC y AFE contiene dos lados del polígono, mientras que los triángulos intermedios solo contienen uno. Pero la suma de los ángulos de cada triángulo vale dos rectos; luego la de los ángulos de todos los triángulos vale tantas veces dos rectos como triángulos haya; es decir, como lados tiene el polígono menos dos; y como la suma de los ángulos de todos los triángulos es evidentemente igual á la de los ángulos del polígono, la suma de los de un polígono convexo cualquiera es igual á tantas veces dos rectos como lados tenga menos dos.

* 2.° Sea un polígono cóncavo ABCDEFGIK (fig. 85). Tiremos las AI, GE, EC, y formarémos de este modo el polígono *convexo* ABCEGIA, en que la suma de los ángulos será igual á tantas veces dos rectos, como lados menos dos tiene. Pero es claro que, partiendo de este polígono, se reproducirá el propuesto, sustituyendo en vez de las rectas AI, GE, EC, las líneas quebradas AKI, GFE, EDC: por consiguiente, examinemos de qué modo variará la suma de sus ángulos por cada una de estas sustituciones, y principiemos por la primera. Al reemplazar la AI por la quebrada AKI, disminuimos la suma de los ángulos del polígono ABCEGIA en los dos ángulos KAI y KIA, porque sustituimos los BAK y GIK en vez de los BAI y GIA; pero tambien la aumentamos en el ángulo entrante K; es decir, en cuatro rectos menos AKI; luego la suma de los ángulos del polígono ha aumentado cuatro rectos y disminuido los tres ángulos KAI, KIA, AKI, que valen dos rectos (170); luego solamente ha aumentado en dos rectos. Por consiguiente, la suma de los ángulos del nuevo polígono ABCEGIKA escede á la de los ángulos del po-

lígono primitivo ABCEGIA en dos rectos; pero tambien tiene el nuevo polígono un lado mas; luego la suma de los ángulos del ABCEGIKA es todavía igual á tantas veces dos rectos como lados tiene menos dos; y como se podria repetir para los otros ángulos entrantes F y D el mismo razonamiento que acabamos de hacer para el K, queda el teorema demostrado.

Podria suceder que los tres puntos A, I, G estuviesen en línea recta (fig. 86). Entonces, al sustituir la línea quebrada AKI á la recta AI, se aumentaria en dos unidades el número de los lados del polígono; pero tambien la suma de sus ángulos aumentaria en cuatro rectos. En efecto, reemplazando la recta AI por la línea quebrada AKI, se disminuye la suma de los ángulos del polígono ABCEGA en el ángulo KAI; pero se le aumentan los nuevos K y GIK; mas este último, como esterior al triángulo AKI, vale la suma de los dos interiores opuestos KAI y AKI (172); luego la suma de los ángulos del polígono aumenta en K+KAI+AKI, y disminuye en KAI; luego solamente aumenta en K+AKI; es decir, en cuatro rectos, pero tambien el número de lados ha aumentado en dos unidades.

Finalmente, podria suceder que la recta AI prolongada atravesase al polígono (fig. 87), de modo que el ABCEGIA fuese tambien cóncavo, como se ve en la figura. Entonces se uniria A con G, y se partiria del polígono convexo ABCEGA; despues, sustituyendo primero la línea quebrada AIG en vez de la recta AG, y luego AKI en vez de AI, se vendria al polígono primitivo.

219. Escolio. El teorema que acabamos de demostrar tambien puede enunciarse como sigue:

La suma de los ángulos interiores de todo polígono es igual á tantas veces dos rectos como lados tiene, menos cuatro rectos; porque repitiendo dos rectos tantas veces como lados tiene menos dos, hay evidentemente que quitar dos veces dos rectos, esto es, cuatro rectos, de tantas veces dos rectos como lados hay [1]. Se llegaria á este mismo resultado para un polígono *convexo* descomponiéndole en triángulos por medio de diagonales tiradas desde un punto tomado en el interior de este polígono.

---

[1] Sea n el número de lados del polígono. Segun el teorema (218), la suma de todos los ángulos interiores podrá espresarse por $s=(n-2)\,.\,2r$ (llamando r á un ángulo recto, y s á la suma); y haciendo la multiplicacion indicada en el segundo miembro $s=n.2r-4.r$.
(*Nota del Traductor*).

Teorema II.

220. *Si se prolongan todos los lados de un polígono convexo cualquiera* ABCDE (fig. 88) *en el mismo sentido, la suma de todos los ángulos esteriores* (**172**) B′BC, C′CD, D′DE, etc., *es igual á cuatro rectos.*

En efecto, cada ángulo interior, tal como ABC, reunido á su esterior adyacente B′BC, vale dos rectos; luego la suma de todos los ángulos, así interiores como esteriores del polígono, es igual á tantas veces dos rectos como lados hay; si de esto quitamos la suma de los ángulos interiores, que vale tantas veces dos rectos como lados hay menos cuatro rectos (**219**), quedará evidentemente cuatro rectos para la suma de los ángulos esteriores [1].

Teorema III.

***221.** *Si se prolongan en el mismo sentido todos los lados de un polígono cóncavo cualquiera* ABCDEF (fig. 89), *la diferencia entre la suma de los ángulos esteriores de los ángulos salientes y la de los interiores de los entrantes es igual á cuatro rectos.*

Añadiendo á cada ángulo saliente, por ejemplo al ABC, su esterior B′BC, la suma compondrá dos rectos; y quitando de cada ángulo entrante, por ejemplo del BCD, el interior C′CD, formado por el lado CD, y la prolongacion CC′ del BC, la diferencia valdrá tambien dos rectos: luego si á la suma de todos los ángulos salientes se añade la de los esteriores formados del mismo modo que el B′BC, y á esto se añade la diferencia entre la suma de todos los entrantes y la de los interiores formados análogamente al C′CD, el resultado será igual á tantas veces dos rectos como lados tenga el polígono. Por consiguiente quitando de este resultado la suma de todos los ángulos del polígono, tanto entrantes como salientes, suma que equivale (**218**) á tantas veces dos rectos como lados tiene el polígono menos dos, la diferencia cuatro rectos espresará el esceso que la suma

---

[1] Siendo n el número de lados del polígono, $n.2r$ será la suma de los ángulos interiores y esteriores. La de los interiores será (**219** [1]) $n.2r-4.r$; luego los esteriores serán

$$n.2r-(n.2r-4r)=n.2r-n.2r+4r=4r.$$

(*Nota del Traductor*).

de todos los ángulos esteriores de los salientes tenga sobre la de los interiores de los entrantes, que es lo que se queria demostrar ([1]).

TEOREMA IV.

222. *Dos polígonos de igual número de lados son iguales cuando de todos los lados, escepto de uno solo, se sabe que son iguales cada uno del primero á su respectivo del segundo, y que los ángulos comprendidos por los lados iguales, lo son á sus respectivos en el segundo.*

([1]) Me parece muy sencilla é inteligible la siguiente demostracion, que acostumbro á dar á mis discípulos cuando les esplico este teorema.

«Añadiendo á cada ángulo saliente, por ejemplo al ABC, su esterior B'BC, la suma compondrá dos rectos: y quitando de cada ángulo entrante, por ejemplo del BCD, el interior C'CD, formado por el lado CD, y la prolongacion CC' del BC, la diferencia valdrá tambien dos rectos. Luego si llamamos m al número de ángulos salientes que tenga el polígono y m' al de entrantes, s á la suma de los valores de todos los ángulos salientes, e á la de todos los esteriores formados del mismo modo que el B'BC, s' á la suma de los valores de todos los ángulos entrantes del polígono é i á la de todos los interiores formados junto á estos de un modo análogo al C'CD; tendrémos

$$s+e=m\times 2 \text{ rectos y } s'-i=m'\times 2 \text{ rectos:}$$

por consiguiente, $s+s'+e-i=(m+m')\times 2$ rectos. Pero $s+s'$ es la suma de todos los ángulos interiores del polígono, tanto entrantes como salientes: luego $s+s'$ es igual á tantas veces dos rectos como lados tiene el polígono menos dos, que llamando n al número de lados, será $s+s'=(n-2)\times 2$ rectos; y como tambien $m+m'=n$, podemos establecer

$$(n-2)\times 2 \text{ rectos} + e - i = n\times 2 \text{ rectos};$$

ó bien

$$e-i=n\times 2 \text{ rectos} - (n-2)\times 2 \text{ rectos} = 4 \text{ rectos.»}$$

En la segunda edicion francesa habia la siguiente nota, que voy á reproducir con algunas variaciones, pues aunque los revisores la suprimieron en la edicion siguiente, creo que merece saberse.

Considerando como negativos los ángulos interiores formados por un lado de un ángulo entrante y la prolongacion del otro lado del mismo ángulo, y como positivos los esteriores al polígono, formados por un lado de un ángulo saliente y la prolongacion del otro lado, lo que está conforme con el principio de la geometría analítica en que se conviene en afectar con signos contrarios á las cantidades que tengan un modo de ser enteramente contrario; pues los ángulos interiores formados sobre los entrantes del polígono, tienen comparados con estos una posicion contraria á la que tienen los esteriores formados sobre los ángulos salientes; podrán comprenderse bajo un solo enunciado los teoremas de los números 220 y 221 del modo siguiente:

Prolongando en un mismo sentido todos los lados de CUALQUIER *polígono*, LA SUMA ALGEBRÁICA *de los ángulos formados por cada lado y la prolongacion del anterior equivale á cuatro rectos.*

Comparando este enunciado con el que trae la citada segunda edicion francesa, se verá que he suprimido la denominacion de esteriores que da tanto á los ángulos formados por un lado y la prolongacion del otro en los salientes como á los formados del mismo modo en los entrantes. Mi práctica en la enseñanza me ha hecho conocer que esta denominacion confunde á los discípulos. *(Nota del Traductor).*

Supongamos que en los dos polígonos ABCDE, A'B'C'D'E' (figura 90) se tenga AB = A'B', BC = B'C', CD = C'D', DE = D'E', y que los ángulos B, C, D sean respectivamente iguales á los B', C', D'. Colocando el segundo polígono sobre el primero, de modo que caigan los puntos A' y B' sobre sus homólogos A y B, el lado A'B' coincidirá con AB, y como el ángulo B' = B, el lado B'C' tomará la direccion BC. Pero B'C' = BC; luego el punto C' caerá sobre C; y como el ángulo C' = C, el lado C'D' tomará la direccion CD, y ambos lados coincidirán por ser iguales, y por lo tanto, D' caerá sobre D. Lo mismo se verá que E' caerá en E, y que por consiguiente, los dos lados A'E' y AE coincidirán, por tener sus estremos confundidos. Luego los dos polígonos son iguales.

Teorema V.

223. *Dos polígonos de igual número de lados son iguales, cuando de todos sus ángulos, escepto de uno, se sabe que lo son uno por uno, y que tambien lo son los lados adyacentes á los ángulos que se sabe que son iguales.*

Se demostrará este teorema lo mismo que el anterior, superponiendo los dos polígonos.

224. Corolario. Dos paralelógramos son iguales cuando tienen un ángulo igual comprendido entre dos lados iguales los del primero á los del segundo (204).

Teorema VI.

225. *Dos polígonos son iguales cuando tienen todos sus lados iguales uno á uno, si se sabe que los ángulos comprendidos entre los lados iguales son tambien iguales uno á uno, aunque se ignore si lo son tres ángulos consecutivos.*

En efecto, supongamos que en los dos polígonos ABCDE, A'B'C'D'E' (fig. 90), se tenga AB = A'B', BC = B'C', CD = C'D', DE = D'E', EA = E'A', y que los ángulos A y B sean iguales respectivamente á los ángulos A' y B'. Coloco el segundo polígono sobre el primero, de modo que caigan los puntos A' y B' sobre sus homólogos A y B; es claro que los lados A'E' y B'C' tomarán respectivamente las direcciones AE y BC, y que los puntos E' y C' caerán sobre los E y C, de modo que la diagonal E'C' del segundo polígono coincidirá con la EC del primero; luego EC = E'C'. Mas, por hipótesis, CD = C'D', y DE = D'E'; luego teniendo los triángulos CDE, C'D'E', sus tres lados iguales uno á uno, serán iguales (189) y superponibles, y teniendo confundido CE con C'E', coincidirán: por consiguiente, el polígono A'B'C'D'E' cubrirá exactamente al ABCDE, y estos dos polígonos serán iguales.

226. Hay otros varios casos de igualdad de dos polígonos; mas como son poco importantes, no nos detendrémos á enumerarlos. Solamente observarémos, que si en lo sucesivo hubiese necesidad de probar la igualdad de dos polígonos que no satisfaciesen á las condiciones enunciadas en los números 222, 223 y 225, se los deberá superponer, y si coinciden exactamente, se deducirá que son efectivamente iguales.

227. Escolio. Se sigue de los tres teoremas precedentes, que un polígono queda determinado cuando se conoce: 1.° todos sus lados, á escepcion de uno solo, y los ángulos comprendidos entre cada uno de estos lados y el siguiente; 2.° todos sus ángulos menos uno, y todos los lados que les son respectivameute adyacentes; 3.° todos sus lados y todos sus ángulos, menos tres ángulos consecutivos. Observemos, además, que cuando se tiene todos los ángulos menos uno de un polígono, es tambien conocido este último ángulo (218).

De aquí se deduce que el número de datos necesarios para la determinacion de un polígono de n lados, es $2n-3$. Pero es menester, además, decir entre qué lados están comprendidos los ángulos que se dan, ó á qué ángulos son adyacentes los lados que sirvan de datos. Así es que un pentágono no quedaria determinado por solo el conocimiento de los cuatro lados a, b, c, d, y de los ángulos β, γ, δ; pero si se añade que β está comprendido entre a y b, γ entre b y c, y δ entre c y d, se podrá construir el polígono. Para esto, á la estremidad B (fig. 88) de una recta $AB = a$, se formará un ángulo $ABC = \beta$, se tomará $BC = b$; despues en el punto C se hará un ángulo $BCD = \gamma$, se tomará $CD = c$; en seguida en el punto D se construirá un ángulo $CDE = \delta$, y se tomará $DE = d$; finalmente, uniendo E con A quedará el polígono construido.

CAPÍTULO IV.

PROBLEMAS SOBRE LOS POLÍGONOS.

PROBLEMA I.

228. *Construir un triángulo conociendo dos de sus lados* a *y* b, *y el ángulo* C *comprendido entre ellos.*

Trácese una recta CB (fig. 91), igual al lado *a* por ejemplo, hágase despues en el punto C un ángulo igual al dado C (**147**), y tómese sobre el segundo lado de este ángulo una distancia CA$=b$. Tírese, finalmente, la AB, y el problema queda resuelto.

Este problema siempre es posible.

PROBLEMA II.

229. *Construir un triángulo conociendo uno de sus lados* b *y dos ángulos* A *y* C.

Dos casos pueden ocurrir: ó el lado que se da es adyacente á los dos ángulos A y C; ó es opuesto á uno de ellos, á C por ejemplo.

Primer caso. Tírese la recta AC (fig. 92) igual al lado *b* que se da, fórmense en sus estremos ángulos iguales á los dos dados A y C, y el triángulo ABC, así formado, resuelve evidentemente el problema.

Segundo caso. En los dos estremos de una recta cualquiera AD (fig. 93), fórmense dos ángulos iguales á los dados, y el tercer ángulo F del triángulo AFD, formado de esta manera, será el tercer ángulo del triángulo pedido (**171**), y por lo mismo, uno de los ángulos adyacentes al lado que se dió. Como el otro ángulo adyacente es A, se tomará sobre la recta indefinida AF una longitud AB igual al lado *b*, y tirando por el punto B una paralela BC al lado FD, se formará el triángulo ABC, que resuelve el problema.

Este será siempre posible si la suma de los dos ángulos dados es menor que dos rectos.

230. Si se propone construir un triángulo rectángulo, conociendo en *magnitud y posicion* uno de sus ángulos agudos y su hipotenusa, se describirá sobre esta AB (fig. 94) una circunferencia, y el vértice del ángulo recto deberá encontrarse sobre esta curva (**127**); haciendo en seguida en el punto A un ángulo CAB igual al dado A, y uniendo C con B, se tendrá una solucion del problema. Mas como el ángulo dado lo mismo puede tener su vértice en A que en B, se tomará sobre la semicircunferencia ACB el arco BC′ = AC, y tirando C′A y C′B, se tendrá una segunda solucion. Se hallarán, finalmente, otras dos soluciones, tomando sobre la semicircunferencia inferior los arcos AC″ y BC‴ iguales al AC, y uniendo los puntos C″ y C‴ con los estremos de AB.

De modo que este problema admite cuatro soluciones; mas es necesario observar que los cuatro triángulos construidos de este modo son iguales (186).

Problema III.

231. *Construir un triángulo conociendo sus tres lados* a, b *y* c.

Trácese una recta cualquiera BC (fig. 95) igual á uno de los lados que se dan, *a* por ejemplo: desde el punto C, como centro, y con un radio igual al segundo lado *b*, descríbase un arco: desde el punto B, como centro, y con un radio igual al tercer lado *c*, descríbase otro arco que cortará al primero en A; únase A con B y con C, y el triángulo ABC resolverá el problema.

232. Para que este sea posible, es necesario y suficiente que los dos arcos que se han descrito puedan cortarse, y para esto, que el lado *a* sea menor que la suma de los otros dos *b* y *c*, y mayor que su diferencia (104); y como el lado desde cuyos estremos se han descrito las dos circunferencias es cualquiera de los tres, se deduce que *para que se pueda construir un triángulo con tres rectas dadas, es necesario y suficiente que una de ellas sea menor que la suma de las otras dos y mayor que su diferencia*, condiciones que se pueden evidentemente comprender en una sola, diciendo que: *el lado mayor ha de ser menor que la suma de los otros dos.*

Problema IV.

233. *Dados dos lados* a *y* b *de un triángulo, y el ángulo* A *opuesto á uno de ellos*, al primero por ejemplo, *construir el triángulo*

En el estremo A de una recta AC = *b* (fig. 96), fórmese un ángulo igual al dado A; despues, desde C, como centro, y con un radio igual á *a*, descríbase un arco que cortará al lado AB de este ángulo en B, únase B con C, y el triángulo ABC resuelve el problema. Examinemos ahora esta solucion. Tres casos se pueden presentar, segun que el ángulo A sea obtuso, recto ó agudo.

Primer caso. Si el ángulo A es obtuso (fig. 96), el lado *a*, que es el opuesto, debe ser mayor que *b* (177), y así el problema será imposible si no se cumple esta condicion. En efecto, si desde el punto C se baja una perpendicular sobre AB, caerá necesariamente sobre su prolongacion, pues si no se tendria en un mismo triángulo un ángulo recto y un obtuso, lo que es absurdo (170), porque además aquella no puede cortar á AB en A; luego para que la circunferencia pueda cortar á AB es necesario y suficiente que su radio *a* sea mayor que $AC=b$.

Segundo caso. Si el ángulo A es recto (fig. 97), es aun necesario que *a* sea mayor que *b* (178). Si esta condicion es satisfecha, la circunferencia cortará á AB y á su prolongacion, y los dos triángulos ABC y AB′C satisfarán á la cuestion. Pero estas dos soluciones no forman mas que una; porque, doblando la figura por AC, se ve que estos dos triángulos se cubren exactamente (192).

Tercer caso. Si el ángulo A es agudo (fig. 98) y el lado *a* es mayor que *b*, la circunferencia envolverá al punto A, y por consiguiente, cortará á AB y á su prolongacion; luego el problema será posible, y no admitirá sino una solucion. Lo mismo sucederá si $a=b$, porque entonces A será uno de los puntos de interseccion. En estos dos casos, el ángulo B será agudo, porque será menor que A (177), ó igual á A (179).

Si $a<b$, la circunferencia no cortará á la recta indefinida AB (fig. 99), sino en el caso en que *a* no fuese menor que la perpendicular CI bajada desde el punto C sobre esta recta (54). Si $a=CI$, la circunferencia será tangente á AB en el punto I (88). El triángulo ACI resolveria entonces el problema, y el ángulo B seria *recto*. En fin, si $a>CI$, la circunferencia cortaria á AB en dos puntos B y B′, porque A es esterior. Entonces los dos triángulos ABC y AB′C satisfarán igualmente á la cuestion. Así que, el problema admitirá dos soluciones, y su única diferencia es, que en uno de estos dos triángulos el ángulo opuesto al lado *b* es agudo, y en el otro es obtuso: además, estos dos ángulos son suplementarios, porque en el triángulo CBB′ el ángulo BB′C es igual á B (179), y es además suplementario de AB′C.

PROBLEMA V.

234. *Construir un paralelógramo, conociendo dos lados* a, b, *y el ángulo comprendido* A.

En el estremo de una recta AB igual á a (fig. 76), formo un ángulo DAB=A, y tomo sobre su segundo lado una longitud AD=b. Despues, desde los puntos B y D, como centros, y con los respectivos radios b y a, describo dos arcos que se corten en C; uno dicho punto C con los B y D, y ABCD es el paralelógramo pedido. En efecto, este cuadrilátero es un paralelógramo, porque sus lados opuestos son iguales: además, el ángulo A y los lados que le comprenden se han hecho iguales al ángulo y á los dos lados que se dieron.

Se ve que el problema no admite mas que una solucion, y que así un paralelógramo está determinado por dos lados y el ángulo comprendido.

235. Una vez que un paralelógramo queda determinado cuando se dan dos de sus lados y el ángulo comprendido, se ve: 1.° que *un rombo lo quedará por el conocimiento de un lado y un ángulo.*

2.° *Un rectángulo está determinado conociendo sus dos lados contiguos*, que se llaman *su base y su altura.*

3.° *Un cuadrado por el conocimiento de su lado.* Se construirán estas tres figuras por el procedimiento del n.° 234.

Problema VI.

236. *Construir un polígono igual á otro dado.*

El método que hemos indicado en el núm. 227 puede evidentemente servir para resolver este problema; mas presenta un grave inconveniente, y es, que el menor error que se cometa sobre un ángulo, influye sobre las direcciones de los lados de todos los demás ángulos, y podrá alterar de una manera muy notable la longitud del lado que haya de cerrar el polígono. El siguiente procedimiento, á mas de ser muy sencillo, está exento de este inconveniente.

Tírese por el vértice A del polígono dado ABCDEFGI (fig. 100) una recta cualquiera AA′ de una longitud arbitraria, y por todos los otros vértices tírense paralelas á esta (151, 3.°), sobre las cuales se tomarán las longitudes BB′, CC′,..... iguales todas á AA′, y por último, únase A′ con B′, B′ con C′, C′ con D′..... Es claro que el polígono A′B′C′D′E′F′G′I′ es igual á ABCDEFGI, porque sus lados y sus ángulos homólogos son iguales uno á uno (201, 196 y 74).

237. Este procedimientc, conocido por los carpinteros de embarcaciones con el nombre de *tricaje*, puede emplearse con buen éxito para ejecutar las *cerchas* ó *patrones* de las curvas en que deba ter-

minar una piedra ó una pieza de madera. En efecto, sea C la curva de que se trata. Se marcará sobre ella un gran número de puntos muy próximos unos á otros, principalmente en la parte donde la curvatura sea mas pronunciada, y por todos estos puntos se tirará una série de paralelas. Hecho esto, por medio de una regla flexible se prolongarán todas estas paralelas sobre una lámina muy delgada puesta sobre el *dibujo* en que está trazada la curva C, y se tomarán sobre estas paralelas, y á partir de cada uno de los puntos marcados sobre C, distancias todas iguales entre sí; uniendo en seguida por un trazo contínuo los puntos así determinados, se tendrá una curva C′ que será sensiblemente muy igual á la C; porque se concibe que si resbalase paralelamente á sí misma, cuando uno de sus puntos hubiese llegado sobre el correspondiente de C, los otros tambien se encontrarian sobre sus correspondientes. No habria ya mas que cortar la plancha, siguiendo el contorno obtenido, y se tendria así un patron que, aplicado sobre una piedra ó sobre una pieza de madera, serviria para trazar en ella una curva igual á C.

238. Los artistas emplean para copiar una figura otro método, que es muy espedito, cuando no hay necesidad de una exactitud matemática: *el método de las cuadrículas.*

Se coloca encima de la figura que se quiere copiar un marco dividido en cuadrados iguales por medio de hebras de seda bien tirantes, ó si no se tiene este aparato, se empieza por trazar un ángulo recto que comprenda á la figura entre sus lados, y se toma sobre cada uno de estos un número bastante grande de pequeñas divisiones iguales, para que, tirando por cada una de ellas una série de paralelas al otro lado, el rectángulo determinado por las dos estremas encierre la figura. Se numeran todas estas paralelas á partir desde el vértice del ángulo, I, II, III,.... 1, 2, 3..... Despues se construye sobre la hoja de papel que ha de recibir la copia un rectángulo igual al precedente, y dividido como él en cuadros, que se numeran del mismo modo. Para fijar sobre la copia la posicion de un punto cualquiera del original, observo que se encuentra, por ejemplo, en el cuadro formado por las verticales designadas por II y III, y por las horizontales 6 y 7; tomo con el compás su distancia á la vertical II, y llevo esta distancia sobre la horizontal 7 del segundo marco, á partir de esta vertical; despues, habiendo medido igualmente la distancia del punto á la horizontal 7, la llevo perpendicularmente á la horizontal 7 de la copia, lo que puede hacerse á ojo; y tengo así la posicion del homólogo de un punto tomado en el original. Del mismo modo determinaré la posicion de todos los demás vértices del polígono, y uniendo cada uno de ellos con el siguiente, quedará ejecutada la copia.

Si la figura encierra líneas curvas, se llevarán sobre la copia los puntos en que cada una de ellas corte á los lados de los diferentes cuadros que atraviese, lo cual dará un cierto número de puntos de cada curva, y solo faltará unirlos por medio de un trazo contínuo.

Tal es el método que se emplea para copiar las cartas geográficas, los planos topográficos, y aun cuadros de que se quiera tener una copia fiel; solamente que no se hace uso del compás mas que para trazar los rectángulos y sus divisiones, y despues se situan *poco mas ó menos* en cada cuadrito de la copia los puntos homólogos de los del original, y bien se deja conocer que los errores serán tanto menores, cuanto mas pequeños sean los cuadrados. Así, cuando en un mismo cuadro haya muchos detalles, se le subdividirá en otros mas pequeños, de modo que se llegará á atenuar los errores tanto como se quiera. Es fácil conocer que ejercitándose en este método de dibujar, y empleando cuadrados cada vez mayores para la cuadrícula, se adquirirá bien pronto una grande exactitud al golpe de vista; así es que este método está recomendado por los grandes pintores.

239. PROBLEMAS PARA RESOLVER. 1.° *Construir un triángulo conociendo un ángulo, uno de sus lados adyacentes y la suma ó diferencia de los otros dos.*

2.° *Construir un triángulo, conociendo un ángulo, la suma ó la diferencia de los lados que le comprenden y el tercer lado.*

3.° *Construir un triángulo, conociendo el radio del círculo inscripto á este triángulo, uno de sus lados y la suma ó la diferencia de los otros dos.*

4.° *Dados un ángulo de un triángulo y los radios de los círculos inscripto y circunscripto, construir este triángulo.*

5.° *Construir un triángulo conociendo su base, su altura y el radio del círculo inscripto ó del circunscripto.*

6.° *Dadas dos circunferencias* O *y* O', *y la magnitud y posicion de dos rectas* AB *y* CD (fig. 101), *construir un triángulo tal que uno de sus lados tenga sus estremos sobre estas dos circunferencias, y los otros dos sean respectivamente iguales y paralelos á* AB *y* CD.

7.° *Por un punto dado en el plano de dos paralelas, tirar una secante tal que la suma ó la diferencia de las distancias de los puntos en que las corta al punto dado, sea igual á una recta tambien dada.*

8.° *Hallar el punto en que una bola colocada en* F (fig. 102) *debe tocar á la banda* AB *de una mesa de billar, para que pueda venir á chocar con la bola colocada en* G [1].

9.° *Hallar el punto en que debe tocar á la banda* AB *de una mesa de billar la bola colocada en* F, *para que despues de haber tocado sucesivamente en las otras bandas* BC, CD *y* DA, *vaya á chocar con la bola puesta en* G.

10.° *Por uno de los puntos de interseccion de dos circunferencias, tirar una secante tal, que la suma ó la diferencia de las cuerdas que deje en las dos circunferencias sea igual á la recta dada* m. — *Determinar en qué caso la suma de las dos cuerdas será un máximo.*

11.° *Construir un triángulo igual á otro dado, y que sea tal, que las direcciones de sus lados pasen por tres puntos dados.*

12.° *Hacer pasar por tres puntos dados los lados de un triángulo equilátero que sea el mayor posible.*

LIBRO TERCERO.

LINEAS PROPORCIONALES Y POLIGONOS SEMEJANTES.

CAPÍTULO PRIMERO.

LÍNEAS PROPORCIONALES.

240. Se dice que *dos longitudes son proporcionales á otras dos, cuando la razon de las dos primeras es igual á la de las segundas.*

Si, por ejemplo, se tienen cuatro longitudes A, B, A′, B′, tales que $A=\frac{3}{5}B$ y $A'=\frac{3}{5}B'$, la razon $\frac{A}{B}$ será igual á la razon $\frac{A'}{B'}$, y se dirá que las longitudes A y B son proporcionales á las A′ y B′.

La espresion $\frac{A}{B}=\frac{A'}{B'}$, *que indica la igualdad de dos razones* $\frac{A}{B}$ *y* $\frac{A'}{B'}$, *es lo que se llama una proporcion.*

---

[1] Se sabe que la bola, al tiempo de reflejar sobre la banda, se desvía formando con ella un ángulo igual al que con la misma formaba la direccion que traia.

241. Una línea dada puede siempre dividirse en dos partes, tales que su razon sea igual á la de dos longitudes dadas.

En efecto, consideremos que un punto M parte desde uno de los estremos A de la línea dada, y marcha hácia el otro B: dividirá la línea AB en dos partes, de las que una AM irá creciendo progresivamente desde cero hasta AB, al paso que la otra MB disminuirá desde AB hasta cero. Por lo tanto, la razon $\frac{AM}{MB}$ aumentará de una manera contínua pasando por todos los valores comprendidos entre cero y el infinito. Habrá, pues, una posicion del punto M, para la cual esta razon será igual á la dada, y es claro que no habrá mas que una.

TEOREMA I.

242. *Tres paralelas* AB, CD *y* EF (fig. 103 y 104) *cortan á dos rectas cualesquiera* AE *y* BF *en partes proporcionales*, es decir, que se tendrá la proporcion

$$\frac{AC}{CE}=\frac{BD}{DF}.$$

Distinguirémos dos casos, segun que las rectas AC y CE sean comensurables, ó que no lo sean.

1.° *Supongamos que* AC *y* CE (fig. 103) *sean comensurables*, y que su comun medida quepa en AC 8 veces y en CE 3; la razon de estas dos rectas será $\frac{8}{3}$. Si por todos los puntos de division de AE se tiran paralelas á EF, digo que BF quedará tambien dividido en *once* partes iguales, de las que BD contendrá *ocho* y DF *tres*, por lo que la razon de BD á DF será tambien la de $\frac{8}{3}$. Efectivamente, si por los puntos de division de BF se tiran paralelas á AE, se formará una série de triángulos BGI, IKL, LMN, NOP..... que todos serán iguales (183); porque los lados BG, IK, LM, NO..... son iguales á las partes correspondientes de AE (197); y por consiguiente, iguales entre sí; los ángulos B, I, L, N..... son correspondientes, y los G, K, M, O.... tienen sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido; luego estos triángulos son todos iguales; de modo que BI=IL=LN=NP....; luego, finalmente, la razon de BD á DF es $\frac{8}{3}$, y por lo tanto

$$\frac{AC}{CE}=\frac{BD}{DF}.$$

2.° *Supongamos que las rectas* AC *y* CE (fig. 104) *sean incomensurables*. Divido CE en un número cualquiera de partes iguales, y coloco una de ellas sobre AC desde C hácia A tantas veces como pueda caber, y sea AG el resto que llegue á obtener; tiro GI paralela á AB, y como las rectas CG y CE son comensurables, tendré

$$\frac{GC}{CE}=\frac{ID}{DF}.$$

Pero CG é ID son dos cantidades variables que tienden respectivamente hácia AC y BD á medida que el número de partes en que se ha dividido á CE sea mayor, porque el punto G se podrá así ir acercando tanto como se quiera al punto A. Luego las razones variables

$$\frac{GC}{CE} \text{ y } \frac{ID}{DF}$$

tienen por límites respectivos.

$$\frac{AC}{CE} \text{ y } \frac{BD}{DF},$$

pero como dichas relaciones variables son constantemente iguales. sus límites tambien lo serán; por consiguiente,

$$\frac{AC}{CE}=\frac{BD}{DF},$$

que es lo que se queria demostrar.

243. Corolario I. *Si á dos rectas cualesquiera* AB *y* A′B′ (figura 105) *se corta por una série de paralelas* AA′, CC′, DD′, *etc.*, *las partes de la una serán proporcionales á sus correspondientes de la otra*, de modo que se tendrá

$$\frac{AC}{A'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DF}{D'F'}=\frac{FB}{F'B'}.$$

244. Corolario II. *Toda paralela* DF *á uno de los lados* BC *de un triángulo* (fig. 106) *corta á los otros dos en partes proporcionales*; porque se puede concebir una tercera paralela por el vértice A, y entonces se tendrá

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AF}{FC}.$$

Aplicando á esta proporcion el principio del núm. **105** de la *Aritmética*, resultará

$$\frac{AD+DB}{AF+FC} \text{ ó } \frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AF}=\frac{DB}{FC}.$$

Teorema II.

245. Recíprocamente, *toda recta* CD *que divide en partes proporcionales á los dos lados no paralelos de un trapecio* ABFE, *es paralela á las bases* (fig. 104); es decir, que si se tiene

$$\frac{AC}{CE}=\frac{BD}{DF},$$

la recta CD será paralela á AB.

En efecto, la paralela á AB que tirásemos por el punto C iria á dividir al lado BF en dos partes, cuya razon seria igual á $\frac{AC}{CE}$ (**242**). Mas, por hipótesis, el punto D divide ya á BF en dos partes que están entre sí en la misma razon; luego, como es el único que goza de esta propiedad (**241**), la paralela tirada por el punto C pasará necesariamente por el D, y coincidirá con CD.

246. Corolario I. *Toda recta que divide á dos lados de un triángulo en partes proporcionales, es paralela al tercer lado;* porque á todo triángulo se puede considerar como un trapecio, del cual una de las bases se hubiese reducido á un punto.

247. Corolario II. Luego, *si se corta en partes proporcionales las rectas* AB, AC, AD, AE, AF, *tiradas desde un mismo punto* A *á diferentes de la recta* XY (fig. 107), *todos los puntos de division* B′, C′, D′, E′, F′ *estarán en línea recta.*

Teorema III.

248. *Toda recta que divide á un ángulo interior ó esterior de un triángulo en dos partes iguales, divide al lado opuesto en dos* SEGMENTOS ADITIVOS Ó SUSTRACTIVOS [1], *que son proporcionales á los lados adyacentes.*

---

[1] Se llaman segmentos de una recta las distancias desde un punto de su direccion á sus dos estremos; se dice que los segmentos son *aditivos* cuando dicho punto se halla entre los dos estremos de la recta; y que son *sustractivos* cuando aquel punto está fuera de dichos estremos sobre la prolongacion de la recta

1.° Sea AI la bisectriz del ángulo A (fig. 108): tirando por el punto B una paralela á ella, que termine en D sobre la prolongacion del lado CA, tendrémos la proporcion (244)

$$\frac{IB}{IC}=\frac{AD}{AC};$$

de modo que la primera parte del teorema quedará demostrada si probamos que AD = AB. Pero el ángulo BDA = IAC (70, 3.°), y el DBA = BAI (70, 1.°); luego BDA = DBA, porque los ángulos IAC y BAI son iguales por hipótesis, y entonces será AD = AB, y por consiguiente

[1] $$\frac{IB}{IC}=\frac{AB}{AC}.$$

2.° Sea AI′ la bisectriz del ángulo esterior DAB; se hará la misma construccion, y probando que D′A = AB, se llegará á la proporcion

[2] $$\frac{I'B}{I'C}=\frac{AB}{AC}.$$

249. Corolario. Si el punto A se mueve de tal manera que la razon de sus distancias á los puntos B y C permanezca constante, las bisectrices del ángulo BAC y de su suplemento BAD cortarán siempre á la recta indefinida BC en los puntos I é I′; pero el ángulo IAI, que forman es recto; luego el punto A recorrerá la circunferencia descrita sobre II′ como diámetro. De consiguiente, *el lugar geométrico de todos los puntos cuyas distancias á dos dados* B *y* C *están en la relacion constante de* $\frac{p}{q}$, *es la circunferencia que tiene por diámetro el intérvalo comprendido entre los dos puntos de* BC, *cuyas distancias á* B *y á* C *son proporcionales á* p *y* q.

Teorema IV.

250. *Dos triángulos equiángulos entre sí tienen sus lados homólogos proporcionales* (1).

Supongamos que los tres ángulos A, B, C (fig. 109) sean respectivamente iguales á los A′, B′, C′; y digo que los dos triángulos ABC y A′B′C′ tendrán sus lados homólogos proporcionales.

---

(1) Lados homólogos son aquellos que están opuestos á ángulos iguales.

En efecto, supuesto que el ángulo $A = A'$, si sobre los lados AB y AC se toman las partes AD y AE, respectivamente iguales á las A'B' y A'C', y se tira la recta DE, se formará un triángulo ADE igual al A'B'C' (181), y que tendrá iguales con este las partes homólogas; así el lado $DE = B'C'$ y el ángulo $ADE = B'$; por consiguiente, este ángulo ADE será tambien igual á B, y la recta DE paralela á BC (71, 3.°), por cuya razon se tendrá (244).

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

Pero si tiramos EG paralela á AB, esta recta cortará á los dos lados AC y BC en partes proporcionales; y como $BG = DE$ (197), se tendrá

$$\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}.$$

Y á causa de la razon comun $\frac{AC}{AE}$, será

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE},$$

ó bien, reemplazando las líneas AD, AE y DE por sus iguales A'B' A'C' y B'C':

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}:$$

lo que queríamos demostrar.

251. Escolio. Obsérvese que, tan luego como se haya reconocido que dos triángulos tienen dos ángulos del uno iguales á dos del otro, puede decirse que sus lados homólogos son proporcionales; porque el tercer ángulo del primero será igual al tercero del segundo (171).

Teorema V.

252. *Las rectas* AC, AD, AE, *que parten desde el vértice de un triángulo* ABF (fig. 107), *dividen á su base y á toda paralela á esta* B'F' *en partes proporcionales, y ellas mismas quedan cortadas por esta paralela en partes proporcionales.*

Los triángulos ABC y A'B'C', ACD y A'C'D', ADE y A'D'E', AEF y A'E'F' son equiángulos (70, 3.°); luego sus lados homólogos son proporcionales (250), por cuya razon tendrémos entre sus lados las cuatro séries de razones iguales

$$\frac{AB}{AB'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{AC'},$$
$$\frac{AC}{AC'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{AD}{AD'},$$
$$\frac{AD}{AD'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{AE}{AE'},$$
$$\frac{AE}{AE'}=\frac{EF}{E'F'}=\frac{AF}{AF'}.$$

Estando así cada série ligada con la precedente por una razon comun, se debe deducir que todas las razones que las componen son iguales, y que

$$\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EF}{E'F'},$$

y que

$$\frac{AB}{AB'}=\frac{AC}{AC'}=\frac{AD}{AD'}=\frac{AE}{AE'}=\frac{AF}{AF'},$$

lo que demuestra: 1.° que las rectas BF y B'F' están cortadas en partes proporcionales; 2.° que la recta B'F' corta á las AB, AC, AD AE y AF en partes proporcionales.

Teorema VI.

253. *Si dos ángulos* BAC y B'A'C' (fig. 110) *tienen sus lados* AB *y* A'B', AC *y* A'C', *paralelos, proporcionales y dirigidos en el mismo sentido ó en sentidos contrarios, las rectas que unan los estremos* B *con* B', *y* C *con* C' *de sus lados homólogos, irán á cortar en un mismo punto á la que une sus vértices* A *y* A'.

Sea, en efecto, O el punto de concurso de BB' y AA': voy á demostrar que los tres puntos O, C' y C están en una misma línea recta. Supongamos que no sea así, y que C'' sea el punto en que OC corta á A'C'; supuesto que A'C' es paralela á AC, los triángulos OAC y OA'C'' son equiángulos, y por lo tanto (250)

$$\frac{AC}{A'C''}=\frac{OA}{OA'};$$

mas los triángulos OAB y OA'B' dan igualmente

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{OA}{OA'};$$

luego, por la razon comun $\frac{OA}{OA'}$, será

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C''}.$$

Pero se tiene por hipótesis

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'};$$

luego $A'C''=A'C'$, y los tres puntos O, C' y C están en línea recta, como se queria demostrar.

254. Escolio. Téngase presente que esta demostracion es aplicable al caso en que las líneas quebradas BAC y B'A'C' se conviertan en dos rectas paralelas, porque es independiente de la magnitud de los ángulos iguales BAC y B'A'C'.

De aquí se deduce que *las diagonales de un trapecio, lo mismo que las direcciones de los lados no paralelos, van á cruzarse sobre la recta que une los medios de sus dos bases* (1), porque las rectas AI y MC, IB y DM (fig. 75) son proporcionales, paralelas y en sentidos contrarios, y las rectas AI y DM, BI y MC son proporcionales, paralelas y en el mismo sentido.

Luego, *si una recta resbala sobre el plano de un triángulo paralelamente á su base, y en cada una de sus posiciones se unen los puntos en que corta á los otros dos lados con los estremos de la base*, EL LUGAR GEOMÉTRICO *de los puntos de interseccion de todas las rectas de union, será la que va desde el vértice del triángulo al medio de su base.*

---

(1) Esta propiedad es un caso particular de la siguiente:

Los lados no paralelos de un trapecio cortan en un mismo punto á la recta que divide en partes proporcionales cualesquiera las bases del trapecio; y en otro solo punto cortan á esta misma recta las dos diagonales.

Para demostrar lo primero basta concebir que en la figura 110 (izquierda), hayan ido creciendo los ángnlos BAC y B'A'C', conservando sus lados siempre paralelos, hasta qne AB haya quedado en la prolongacion de AC, y A'B' en la de A'C'; y como la demostracion del núm. **253** es independiente del valor de los ángulos BAC y B'A'C', es aplicable al límite de estos ángulos; es decir, al caso en que B, A, C, estén en línea recta, y en otra los B', A', C'.

Para demostrar lo segundo, no hay mas que hacer la misma consideracion en la fig. 110 (derecha), despues de haber unido B con C' y C con A'. *(Nota del Traductor).*

Teorema VII.

255. *Dos secantes* OA *y* OB (fig. 111) *que parten desde un mismo punto* O *tomado fuera de un círculo, son inversamente proporcionales á sus partes esteriores* OC y OD; es decir, que se tendrá la proporcion

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OD}{OC},$$

en que una de las secantes y su parte esterior forman los dos estremos, y la otra y su parte esterior los medios.

Para demostrarlo, tiremos las AD y BC, y formarémos así dos triángulos ADO y OBC, que serán equiángulos, porque el ángulo O les es comun y los ángulos inscriptos A y B se apoyan sobre el mismo arco CD: sus lados homólogos serán, por lo tanto, proporcionales, y así

> la razon entre OA (opuesto al ángulo D) y OB (su homólogo, como opuesto al ángulo C que es el igual á D) es igual á la razon entre OD (opuesto al ángulo A) y OC (su homólogo, como opuesto al ángulo B que es el igual á A [1]),

que es lo que se queria demostrar.

256. Corolario. Observando que la demostracion precedente no depende de la magnitud de la cuerda BD que la secante OB deja en el círculo, se deducirá que la proporcion de arriba subsiste aunque se haga girar á OB alrededor de O, de modo que tienda á salir del círculo; luego tambien tendrá lugar en su límite, es decir, cuando la cuerda BD haya quedado nula. Pero entonces la secante OB y su parte esterior OD habrán quedado iguales ambas á la tangente OT; luego se tendrá en este caso

$$\frac{OA}{OT}=\frac{OT}{OC};$$

lo que nos manifiesta que cuando una tangente y una secante parten de un mismo punto, la tangente es media proporcional entre toda la secante y su parte esterior [2].

---

[1] Siempre que se establezca una proporcion entre los lados de dos triángulos, no debe jamás descuidarse el hacer ver, como acabamos de verificarlo, que los dos términos de cada razon son lados homólogos.

[2] Este teorema se puede demostrar á *priori* del siguiente modo:

Si unimos los puntos A y C con el de contacto T, formarémos dos triángulos AOT y

TEOREMA VIII.

257. *Las partes de dos cuerdas* AC, BD (fig. 112) *que se cortan, son inversamente proporcionales*, es decir, que se tiene la proporcion

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OD}{OC},$$

en que las partes de una cuerda forman los estremos, y las de la otra los medios.

Si tiramos las AD y BC, formarémos los dos triángulos equiángulos AOD y BOC; porque los ángulos en O son opuestos por el vértice, y los inscriptos A y B se apoyan sobre el mismo arco DC luego sus lados homólogos son proporcionales, y se tiene

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OD}{OC},$$

que demuestra la proposicion.

258. ESCOLIO. Si en las proporciones que hemos obtenido por los teoremas de los n.os 255, 256 y 257, se iguala el producto de medios al de estremos, se hallará $OA\times OC=OB\times OD=\overline{OT}^2$; donde se ve que estos tres teoremas están comprendidos en el siguiente

TEOREMA IX.

Si desde un punto cualquiera se tira arbitrariamente una secante á una circunferencia, el producto de las distancias de este punto á los dos de interseccion es constante.

259. *Se llama proyeccion de una recta* AB *sobre otra* XY (fig. 113) *la parte* A′B′ *de esta segunda comprendida entre las perpendiculares bajadas sobre ella desde los estremos de la primera.* Así vemos que en un triángulo rectángulo cada cateto es la proyeccion de la hipotenusa sobre la direccion de aquel cateto.

COT equiángulos, porque tienen el ángulo comun O, y cada uno de los OAT y CTO tiene por medida la mitad del arco CT; y como sus lados homólogos serán proporcionales, se tendrá

$$\frac{OA}{OT}=\frac{OT}{OC}$$

TEOREMA X

260. *Si desde el vértice* A *del ángulo recto de un triángulo rectángulo* ABC (fig. 114) *se baja una perpendicular* AI *sobre la hipotenusa, se verificará :*

1.° *Que esta perpendicular dividirá al triángulo en otros dos, que serán equiángulos con él, y por consiguiente, entre sí.*

2.° *Esta perpendicular será media proporcional entre los dos segmentos* BI *é* IC *en que divide á la hipotenusa.*

3.° *Cada cateto será medio proporcional entre la hipotenusa y su proyeccion sobre esta.*

4.° *El cuadrado de la longitud* (27) *de la hipotenusa será igual á la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.* (Esta proposicion se conoce en geometría con el nombre de *teorema de Pitágoras*, por el nombre del filósofo que la descubrió).

5.° *Los cuadrados de las longitudes de los tres lados serán proporcionales á las longitudes de las proyecciones de estos lados sobre la hipotenusa.*

Efectivamente: 1.° los triángulos ABI y ABC son equiángulos, porque son rectángulos el uno en I y el otro en A, y que además tienen el ángulo B comun; luego el tercero BAI del primer triángulo es igual al tercero C del segundo.

Del mismo modo se demostraria que los triángulos AIC y ABC son equiángulos, y que por lo tanto los AIB y AIC gozan de la misma propiepad [se demostrará esto mismo directamente haciendo observar que sus ángulos agudos tienen perpendiculares sus lados (75)].

2.° Por ser equiángulos los triángulos AIB y AIC, tienen proporcionales sus lados homólogos BI y AI, AI é IC, que darán la proporcion

$$\frac{BI}{AI}=\frac{AI}{IC};$$

que demuestra que la perpendicular AI es media proporcional entre los dos segmentos BI é IC de la hipotenusa.

3.° Una vez que los triángulos AIB y ABC son equiángulos, sus lados homólogos BI y AB, AB y BC, serán proporcionales, y darán que

$$\frac{BI}{AB}=\frac{AB}{BC}. \qquad [1]$$

Los triángulos AIC y ABC dan igualmente, comparando sus lados homólogos,

[2] $$\frac{IC}{AC}=\frac{AC}{BC}.$$

Luego cada cateto AB ó AC es medio proporcional entre la hipotenusa BC y su proyeccion BI ó IC sobre esta hipotenusa.

4.° Suponiendo que se hayan *medido* (24) los tres lados del triángulo de que nos ocupamos, como igualmente los segmentos BI é IC de la hipotenusa, y que se hayan planteado las proporciones [1] y [2] entre las longitudes que se hubiesen obtenido, se podrá en cada una de estas igualar el producto de estremos al de los medios, y resultará

$$\overline{AB}^2 = BI.BC,$$

y $$\overline{AC}^2 = IC.BC.$$

Sumando estas igualdades miembro á miembro, y sacando en la suma de los segundos á BC por factor comun de las cantidades á que multiplica, se encontrará

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=(BI+IC).BC;$$

pero $BI+IC=BC$; luego se hallará por último

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2.$$

De modo que el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de las longitudes de los dos catetos.

5.° Como acabamos de ver que

$$\overline{AB}^2 = BI.BC, \qquad \overline{AC}^2 = IC.BC,$$

y además sabemos que

$$\overline{BC}^2 = BC.BC,$$

tendrémos evidentemente la série de razones iguales

$$\frac{\overline{AB}^2}{BI.BC}=\frac{\overline{AC}^2}{IC.BC}=\frac{\overline{BC}^2}{BC.BC};$$

porque cada una de ellas es igual á la unidad.

Multiplicando cada razon por el *número* BC, resultará

$$\frac{\overline{AB}^2}{BI}=\frac{\overline{AC}^2}{IC}=\frac{\overline{BC}^2}{BC};$$

lo que demuestra que los cuadrados de las longitudes de los tres lados son proporcionales á las longitudes de sus proyecciones respectivas BI, IC y BC sobre la hipotenusa.

261. COROLARIO I. Del principio 4.° se sigue que *para calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo en que se conozcan las longitudes de los otros dos lados, es menester sumar los cuadrados de estas longitudes, y de la suma estraer la raiz cuadrada.* Si, por ejemplo, los dos catetos valiesen respectivamente 3 metros y 4 metros, se elevarian al cuadrado los dos números abstractos 3 y 4, lo que daria 9 y 16, y de la suma $9+16=25$ se estraeria la raiz cuadrada y el número resultante 5 seria la longitud de la hipotenusa en metros.

262. Tambien se sigue del mismo principio que, si del cuadrado de la hipotenusa [1] se resta el cuadrado de uno de los catetos, la resta será el cuadrado del otro cateto: luego *para calcular uno de los catetos de un triángulo rectángulo, de quien se conozca el otro y la hipotenusa, se restará del cuadrado de la hipotenusa el cuadrado del cateto conocido, y del resto se estraerá la raiz cuadrada.* Asi se hallará que en un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tenga 5^m y uno de los catetos 4^m, el otro tendrá

$$\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3^m.$$

263. COROLARIO II. Si desde un punto cualquiera A de una circunferencia (fig. 114) se tiran dos cuerdas AB y AC á los estremos del diámetro BC, se formará un triángulo rectángulo ABC (**119**), al que se podrán aplicar los principios 2.° y 3.°; de lo que deducimos que

1.° *La perpendicular bajada desde un punto cualquiera de la circunferencia sobre un diámetro, es media proporcional entre los dos segmentos de este diámetro* [2]. Esta proposicion se deduce inmediata-

---

[1] En adelante, cuando queramos hablar del cuadrado de la *longitud* de una recta, del producto ó del cociente de las *longitudes* de dos rectas, dirémos, por abreviar, el cuadrado de esta recta, el producto ó el cociente de estas rectas.

[2] Este teorema da una solucion de este problema de álgebra: *dividir un número dado en dos partes, cuyo producto sea un* MÁXIMO. En efecto, se puede concebir que se haya descrito una circunferencia cuyo diámetro tenga una *longitud* igual á este número (**27**), y en este caso, si se baja una perpendicular al diámetro desde un punto cualquiera de la circunferencia, se sigue del teorema en cuestion, que el producto de los dos segmentos de este diámetro será igual al cuadrado de esta perpendicular; pero el máximo de esta es el radio; luego el producto de los dos segmentos será el máximo cuando la perpendicular caiga en el centro, porque solo entonces será ella igual al radio. Por consiguiente, *para dividir un número en dos partes cuyo producto sea un* MÁXIMO, *es preciso dividirle en dos partes iguales.*

mente de la del número 257, con solo suponer allí que las dos cuerdas son perpendiculares entre sí, y que una de ellas sea un diámetro.

2.° *Toda cuerda tirada por el estremo de un diámetro, es media proporcional entre este diámetro y la proyeccion de aquella sobre este.*

264. Corolario III. *Si se tiran diferentes cuerdas* AC, AD, BF..... (fig. 115) *desde los estremos de un mismo diámetro* AB, *sus cuadrados serán proporcionales á sus proyecciones sobre el diámetro.* Con efecto, se deduce del corolario precedente que *el cuadrado de una cuerda es igual al producto de la proyeccion de esta cuerda por el diámetro*; así es que

$$\overline{AC}^2 = AC'.AB,\quad \overline{AD}^2 = AD'.AB,\quad \overline{BF}^2 = BF'.AB;$$

además $\overline{AB}^2 = AB.AB$; luego

$$\frac{\overline{AC}^2}{AC'.AB} = \frac{\overline{AD}^2}{AD'.AB} = \frac{\overline{BF}^2}{BF'.AB} = \frac{\overline{AB}^2}{AB.AB};$$

en cuyas razones, multiplicando por el número AB cada una de ellas, quedará

$$\frac{\overline{AC}^2}{AC'} = \frac{\overline{AD}^2}{AD'} = \frac{\overline{BF}^2}{BF'} = \frac{\overline{AB}^2}{AB};$$

que es lo que se queria demostrar.

Teorema XI.

265. *En todo triángulo* (fig. 116) *el cuadrado de un lado cualquiera* AB *es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados* AC *y* BC, *aumentada ó disminuida del doble del producto de uno de estos lados* BC *por la proyeccion* CI *del otro* AC *sobre él; aumentada si el ángulo opuesto* C *al primer lado* AB, *es obtuso; y disminuida, si agudo.*

En efecto, para proyectar el lado AC sobre CB, bajarémos desde el punto A una perpendicular AI sobre CB, y esta caerá á derecha ó izquierda del punto C, segun que el ángulo C sea obtuso ó agudo, sin lo cual el triángulo AIC tendria un ángulo obtuso y uno recto, lo que es absurdo. Ahora bien; en el triángulo rectángulo ABI tenemos (260, 4.°):

$$\overline{AB}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{BI}^2.$$

Pero $BI = BC \pm CI$, segun que el ángulo en C sea obtuso ó agudo; ahora, se sabe que el cuadrado de la suma ó de la diferencia de dos cantidades es igual á la suma de los cuadrados de estas cantidades, aumentada ó disminuida en el doble de su producto; luego

$$\overline{BI}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CI}^2 \pm 2.BC.CI.$$

Sustituyendo este valor de $\overline{BI}^2$ en el de $\overline{AB}^2$, resultará

$$\overline{AB}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CI}^2 \pm 2.BC.CI.$$

Mas AI y CI son los dos catetos del triángulo rectángulo ACI; luego la suma de sus cuadrados compone $\overline{AC}^2$; reemplazando, pues, en la igualdad precedente, $\overline{AI}^2 + \overline{CI}^2$ por $\overline{AC}^2$, se tendrá finalmente

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \pm 2.BC.CI,$$

que demuestra el teorema enunciado; porque el signo superior se refiere, como hemos observado, al caso en que el ángulo C es obtuso, y el signo inferior á aquel en que sea agudo..

Nótese que en la figura 117, BI es igual á $CI - BC$, y no á $BC - CI$; pero su cuadrado no por eso deja de ser

$$\overline{CI}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC.CI.$$

266. Corolario. El teorema anterior demuestra que *el cuadrado de un lado cualquiera de un triángulo es mayor ó menor que la suma de los cuadrados de los otros dos lados, segun que el ángulo que se le opone es obtuso ó agudo;* de donde se sigue, aplicando además el principio del número 94, que

1.° *Si el cuadrado del lado mayor de un triángulo escede á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, el ángulo opuesto será obtuso;*

2.° *Si el cuadrado del lado mayor de un triángulo es menor que la suma de los cuadrados de los otros dos lados, el ángulo opuesto será agudo, y tambien que el triángulo será acutángulo* (177).

Ejemplo. Los tres lados de un triángulo valen respectivamente 5^m, 7^m y 8^m: ¿de qué especie es este triángulo? El cuadrado de 5 es 25, el de 7 es 49; su suma 74 es mayor que 64, qué es el cuadrado del lado mayor; luego el triángulo es acutángulo.

3.° *Si el cuadrado del lado mayor es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos, el ángulo opuesto será recto y el triángulo rec-*

tángulo. Así, un triángulo cuyos tres lados contuviesen respectivamente 3, 4 y 5 veces la unidad lineal, seria rectángulo.

267. Esta propiedad de que gozan los números 3, 4 y 5 proporciona un medio, usado con frecuencia en la *Geometría práctica*, para levantar una perpendicular en el estremo de una recta; y consiste en aplicar sobre esta cinco veces una misma longitud arbitraria, y tomando sucesivamente por centros el tercer punto de division y el estremo en que se quiere levantar la perpendicular, y por radios respectivos las distancias desde esta á los puntos quinto y cuarto de division, describir dos arcos que se cortarán en un cierto punto: la línea que une el de interseccion con el estremo de la recta, es la perpendicular pedida; porque los tres lados del triángulo que se forma valen respectivamente 3, 4 y 5 veces una misma longitud.

Para aplicar cómodamente este método al trazado de perpendiculares sobre el terreno, se reunen de dos en dos, por medio de nudos, tres cuerdas tales, que las distancias comprendidas entre cada nudo y el que sigue contengan respectivamente 3, 4 y 5 veces una misma longitud arbitraria, por ejemplo, un metro. Hecho esto, para levantar una perpendicular en el estremo de una recta trazada de antemano, se estenderá el lado 3 sobre ella, colocando en su estremo el nudo que hay entre 3 y 4, y tirando fuertemente del otro, irá á colocarse en la perpendicular pedida.

Teorema XII.

268. *En todo triángulo* ABC (fig. 118), *la suma de los cuadrados de dos lados* AB *y* AC *es igual al doble del cuadrado de la mitad del tercero, mas el doble del cuadrado de la recta que une el medio* D *de este lado con el vértice opuesto* A.

Bájese desde el vértice A la perpendicular AI sobre el lado opuesto BC, y se determinarán las proyecciones BI é IC de los otros dos lados AB y AC sobre la base. Los triángulos BDA y CDA darán respectivamente, segun el teorema del núm. 265,

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2BD.DI.$$
$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 + 2CD.DI.$$

Mas por ser $CD = BD$, sumando miembro á miembro estas dos igualdes, resultará

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{BD}^2,$$

que demuestra el teorema.

*269. Corolario. Si se hace mover el punto A de modo que la suma de los cuadrados de sus distancias á los puntos fijos B y C sea constante, tambien lo será su distancia al medio D de BC. *Luego el lugar geométrico de todos los puntos que son tales, que la suma de los cuadrados de sus distancias á dos puntos dados* B *y* C *es igual á* m^2, *es una circunferencia, cuyo centro está en el medio* D *de* CB, *y cuyo radio es igual á* $\sqrt{\frac{m^2}{2}-\overline{BD}^2}$. Para construir este lugar, se tomará sobre CB (fig. 119) una longitud $BM=m$; en el punto M se levantará una perpendicular $MN=m$: despues se cortará la perpendicular levantada en C por un arco NP, descrito desde B como centro, y con BN por radio; y tirando, finalmente, por el punto D una perpendicular á BC hasta su encuentro con BP, se tendrá el radio AD de la circunferencia que se busca. En efecto, se ve que $\overline{BP}^2$ ó $\overline{BN}^2=2m^2$ (260, 4.°); por consiguiente, $\overline{CP}^2=2m^2-\overline{BC}^2$, de donde $4\overline{AD}^2=2m^2-4\overline{BD}^2$, porque CP y BC son los duplos respectivos de AD y BD (250); luego

$$AD=\sqrt{\frac{m^2}{2}-\overline{BD}^2}.$$

Teorema XIII.

270. *En todo triángulo* ABC (fig. 118), *la diferencia de los cuadrados de dos lados* AB *y* AC *es igual al doble del tercero* BC *multiplicado por la proyeccion sobre este de la recta que une su punto medio con el vértice opuesto* A.

En efecto, restando miembro á miembro las dos igualdades

$$\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2-2BD.DI,$$
$$\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2+2CD.DI,$$

resultará

$$\overline{AC}^2-\overline{AB}^2=4BD.DI,$$

porque $BD=CD$; pero como $4BD.DI=2BC.DI$, se tendrá finalmente

$$\overline{AC}^2-\overline{AB}^2=2BC.DI,$$

que es lo que se queria demostrar.

271. Corolario. Si el punto A se moviese de tal modo que la diferencia de los cuadrados de sus distancias á los puntos fijos B y C

fuera constante, su proyeccion sobre BC permaneceria la misma. Luego *el lugar geométrico de todos los puntos que son tales que la diferencia de los cuadrados de sus distancias á dos puntos dados* B *y* C *es igual á* n^2, *es el sistema de las dos perpendiculares levantadas sobre* BC *á una distancia de su punto medio igual á* $\frac{n^2}{2BC}=\frac{n^2}{4BD}$, porque los puntos de que se trata no hay razon para que estén mas próximos del punto B que del C. Por consiguiente, se levantará en el punto D (fig. 120) una perpendicular DE igual á $\frac{n}{2}$; se tirará EF perpendicular á BE, y no habrá mas que tomar una longitud DF′ igual á DF, y tirar por los puntos F y F′ paralelas á DE. Se ve, efectivamente, que $\overline{DE}^2$ ó $\frac{n^2}{4}=BD.DF$ (260, 2.°), y de aquí se deduce que $DF=\frac{n^2}{4BD}$.

Teorema XIV.

272. *La suma de los cuadrados de los cuatro lados de un cuadrilátero cualquiera* ABCD (fig. 121) *es igual á la de los cuadrados de sus diagonales aumentada con el cuadrado del doble de la recta* IK, *que une los puntos medios de estas mismas diagonales.*

Uniendo el medio I de una de las diagonales con los dos vértices opuestos B y C, resultarán dos triángulos ADB y ACD, que darán respectivamente (268)

$$\overline{AB}^2+\overline{BD}^2=2\overline{BI}^2+2\overline{AI}^2,$$
$$\overline{CD}^2+\overline{AC}^2=2\overline{CI}^2+2\overline{AI}^2:$$

sumando estas dos igualdades ordenadamente, resulta

[1] $$\overline{AB}^2+\overline{BD}^2+\overline{CD}^2+\overline{AC}^2=2\overline{BI}^2+2\overline{CI}^2+4\overline{AI}^2.$$

Pero en el triángulo BIC, por unir la recta IK el vértice I con el medio del lado opuesto, tendrémos

$$\overline{BI}^2+\overline{CI}^2=2\overline{IK}^2+2\overline{BK}^2,$$

y por consiguiente

$$2\overline{BI}^2+2\overline{CI}^2=4\overline{IK}^2+4\overline{BK}^2;$$

luego, sustituyendo en la igualdad [1], resultará

$$\overline{AB}^2+\overline{BD}^2+\overline{CD}^2+\overline{AC}^2=4\overline{IK}^2+4\overline{BK}^2+4\overline{AI}^2$$

Mas $4\overline{IK}^2$ es el cuadrado de $2IK$; $4\overline{BK}^2$ lo es de $2BK$, es decir, de BC, y por la misma razon, $4\overline{AI}^2 = \overline{AD}^2$; luego

$$\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AC}^2 = (2IK)^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2,$$

que es lo que se queria demostrar.

273. Corolario. Si el cuadrilátero ABCD fuese un paralelógramo, sus diagonales se cortarian en dos partes iguales, de modo que la recta que uniese sus puntos medios seria nula. Por lo tanto, *en todo paralelógramo la suma de los cuadrados de los lados es igual á la de los cuadrados de las diagonales.*

Teorema XV.

274. *En todo cuadrilátero inscripto* ABCD (fig. 122), *el producto de las diagonales* AC, BD *es igual á la suma de los productos de los lados opuestos* AB *y* DC, AD *y* BC [1].

Formo en el punto B un ángulo ABI = CBD, y de este modo los triángulos ABI y CBD serán equiángulos; porque siendo tambien BAC = BDC, como inscriptos en el mismo segmento BADC, tendrán dos ángulos respectivamente iguales, y sus lados homólogos serán proporcionales; y se tendrá

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AI}{CD};$$

de la que resulta

$$AB \,.\, CD = AI \,.\, BD.$$

Tambien son equiángulos los triángulos IBC y ABD, porque los ángulos IBC y ABD son iguales, por estar compuestos de dos que respectivamente lo son y de uno comun IBD: además, los BCI y BDA, como inscriptos en el mismo segmento BCDA, son tambien iguales; luego se puede establecer la proporcion

$$\frac{BC}{BD} = \frac{CI}{AD}$$

de la que se deduce que

$$BC \,.\, AD = CI \,.\, BD,$$

[1] Se atribuye este teorema al astrónomo *Ptolomeo*.

y sumando miembro á miembro esta igualdad con la anterior, y sacando BD como factor comun, dará

$$AB \,.\, CD + BC \,.\, AD = (AI + CI)\, BD = AC \,.\, BD,$$

que es lo que se necesitaba probar.

CAPÍTULO II.

POLIGONOS SEMEJANTES.

275. TRIÁNGULOS SEMEJANTES *son los que tienen sus lados proporcionales.*

Existen siempre tales triángulos, porque si hay uno que tenga por lados a, b, c, siendo a el mayor, se verificará que $a < b + c$, y por lo tanto $na < nb + nc$, cualquiera que sea la cantidad n, luego una vez que la mayor de estas tres líneas es menor que la suma de las otras dos (232), se podrá siempre construir ün triángulo cuyos lados sean na, nb y nc (esto es, proporcionales respectivamente á los a, b y c).

Esto mismo resulta del siguiente

TEOREMA I.

276. *Cortando el triángulo* ABC (fig. 109) *por una paralela* DE *á su base, el triángulo parcial* ADE *que resulta es semejante al total.*

Por ser DE paralela á BC cortará á los lados AB y AC en partes proporcionales, que darán

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

Mas, tirando por el punto E una paralela EG á la AB, se cortará tambien á AC y BC en partes proporcionales, y se tendrá;

$$\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{BG} = \frac{BC}{DE}$$

por ser BG = DE (197); luego

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}.$$

Así vemos que los dos triángulos ABC y ADE tienen sus lados proporcionales, ó lo que es lo mismo, que son semejantes.

TEOREMA II.

277. *Dos triángulos semejantes* ABC *y* A′B′C′ (fig. 109) *son equiángulos entre sí.*

Supongamos que los lados AB, AC y BC sean respectivamente proporcionales á los A′B′, A′C′ y B′C′: voy á demostrar que los ángulos A y A′, los B y B′, y los C y C′ son iguales. Tomemos, en efecto, AD = A′B′, AE = A′C′, y uniendo D con E, la recta DE cortará á los lados AB y AC en partes proporcionales, y será, por consiguiente, paralela á BC por lo cual el triángulo ADE será equiángulo con ABC, de modo que, demostrando que es igual á A′B′C′, quedará demostrado el teorema. Para conseguirlo, tiremos la EG paralela á AB, y esta recta cortará á los lados AC y BC en partes proporcionales, y como BG = DE (197), se tendrá la proporcion

$$\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE};$$

pero tambien por hipótesis

$$\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'};$$

luego una vez que AE = A′C′ es menester que DE = B′C′. De aquí se deduce que el triángulo A′B′C′ es igual al ADE (189), y como tal, equiángulo con el ABC.

TEOREMA III.

278. *Dos triángulos son semejantes cuando son equiángulos entre sí.*

Porque hemos probado (250) que dos triángulos tales tienen sus lados homólogos proporcionales.

TEOREMA IV.

279. *Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus lados respectivamente paralelos.*

En efecto, hemos visto que dos ángulos cuyos lados son paralelos, ó son iguales, ó suplementarios (74); de modo que si los triángulos no son equiángulos, podrán presentarse tres casos:

1.° *Que los tres ángulos de uno de los triángulos sean suplementos respectivos de los del otro;* pero entonces la suma de los seis ángulos valdria seis rectos, y esto no puede ser (170).

2.° *Que dos ángulos del uno sean respectivamente suplementos de dos del otro, y el tercer ángulo del primero igual al tercero del segundo;* y entonces la suma de los seis ángulos escederia de cuatro rectos, lo que tambien es absurdo.

3.° *Que un ángulo de uno de los triángulos sea suplemento de uno de los del segundo, y los otros dos del primero respectivamente iguales á los de este;* y en este caso la suma de los ángulos del uno no seria igual á la suma de los ángulos del otro, sino cuando los dos suplementarios fueran rectos; pero entonces los dos triángulos serian equiángulos.

Luego queda demostrado que los dos triángulos tienen que ser equiángulos, y por consiguiente, semejantes (278).

Teorema V.

280. *Dos triángulos son semejantes, cuando tienen sus lados respectivamente perpendiculares.*

La demostracion es la misma que precede.

281. Escolio. Obsérvese con cuidado que en los dos últimos casos de semejanza de triángulos, los lados homólogos son los respectivamente paralelos ó perpendiculares; porque dos lados tales se hallan precisamente opuestos á dos ángulos cuyos lados son tambien paralelos ó perpendiculares; es decir, á dos ángulos iguales.

Teorema VI.

282. *Dos triángulos* ABC *y* A′B′C′ (fig. 109) *son semejantes, cuando tienen un ángulo igual* A = A′ *comprendido entre lados proporcionales* AB *y* A′B′, AC *y* A′C′.

Tómese AD = A′B′, AE = A′C′, y únase D con E: el triángulo ADE será igual al A′B′C′ (181), y semejante al ABC (278), porque la recta DE es paralela á BC, por cortar á los lados AB y AC en partes proporcionales; luego A′B′C′ es semejante á ABC.

283. *Se llaman* POLÍGONOS SEMEJANTES *los que están compuestos de un mismo número de triángulos semejantes uno á uno, y semejantemente dispuestos* [1].

---

[1] Es decir, que los dos ángulos cuyo vértice comun esté en uno de los estremos de la

Teorema VII.

284. *Dos polígonos semejantes tienen sus ángulos iguales uno á uno, y sus lados homólogos proporcionales* (lados homólogos son los adyacentes á ángulos iguales) [1].

Sean los dos polígonos semejantes.

ABCDEFG y A'B'C'D'E'F'G' (fig. 123),

en que los triángulos ABD y A'B'D', BDC y B'D'C', ADE y A'D'E'.... son semejantes y están semejantemente dispuestos. Los cuatro ángulos cuyo vértice está en A, son iguales á los cuatro cuyo vértice está en A' (277); luego el ángulo A es igual al A'; por una razon semejante el ángulo B = B', y asi sucesivamente: luego ya tenemos que los dos polígonos son equiángulos entre sí.

---

recta que sirve de lado comun á dos triángulos del primer polígono, sean homólogos de aquellos cuyo vértice comun esté en uno de los estremos de la que sirve de lado comun á los dos triángulos del segundo semejantes á los del primero. Así, para construir sobre la recta A'B', homóloga de AB, una série de triángulos semejantes á los del polígono ABCDEFG (fig. 123) y semejantemente colocados, se construirá sobre esta recta un triángulo A'B'D' semejante á ABD; luego sobre B'D' uno B'D'C' semejante á BDC, con la condicion de que el ángulo C'B'D' sea igual al CBD, y que B'D'C' lo sea á BDC, y asi sucesivamente (278).

[1] Tambien se da algunas veces por definicion de los POLÍGONOS SEMEJANTES la propiedad enunciada en este teorema, diciendo que *son aquellos que tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos proporcionales*; pero no es buena porque comprende mas condiciones que las necesarias para la semejanza de dos polígonos, como se verá por los teoremas VIII y IX (números 287 y 288).

Si á pesar de esto se quiere partir de esta definicion, fácil es deducir que *dos polígonos semejantes están compuestos de un mismo número de triángulos semejantes uno á uno y semejantemente dispuestos;* pues considerando los dos polígonos semejantes ABCDEFG y A'B'C'D'E'F'G' (fig. 123), que tienen sus ángulos iguales uno á uno y sus lados homólogos proporcionales, y tirando las diagonales AF, AE.. .., A'F', A'E'....., desde los respectivos puntos A y A', los dos primeros triángulos AGF, A'G'F', son semejantes, por tener un ángulo igual G = G' comprendido entre lados proporcionales (282); luego el ángulo AFG = A'F'G', y

$$\frac{AF}{A'F'} = \frac{GF}{G'F'} \text{ ó } \frac{FE}{F'E'}.$$

Pero una vez que GFE = G'F'E', resulta que AFE = A'F'E', y los triángulos AFE y A'F'E' tendrán un ángulo igual comprendido entre lados proporcionales, por lo que serán semejantes. Del mismo modo continuarémos hasta los últimos triángulos.

En seguida se demostrará la recíproca, que *dos polígonos son semejantes cuando están compuestos de igual número de triángulos semejantes uno á uno, y semejantemente dispuestos* (demostracion del n.° 284).

En segundo lugar, la semejanza de los triángulos ABD y A'B'D', BDC y B'D'C', ADE y A'D'E'..... da (275)

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BD}{B'D'}=\frac{AD}{A'D'},$$

$$\frac{BD}{B'D'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'},$$

$$\frac{AD}{A'D'}=\frac{ED}{E'D'}=\frac{AE}{A'E'},\ \text{etc.};$$

y estando ligada cada una de estas séries con otra por una razon comun, darán:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{ED}{E'D'},\ \text{etc.}$$

285. COROLARIO. *Dos polígonos son iguales cuando se componen de igual número de triángulos iguales respectivamente, é igualmente colocados* (222, 223 y 225).

286. ESCOLIO. Hemos visto que dos triángulos no pueden ser equiángulos sin tener sus lados homólogos proporcionales, y recíprocamente; pero esta propiedad pertenece tan solo á las figuras de tres lados. Así, por ejemplo, el rectángulo y el cuadrado son equiángulos, pero sus lados no son proporcionales; al contrario, un rombo y un cuadrado tienen sus lados proporcionales, y no son, sin embargo, equiángulos.

Pero se puede demostrar de un modo general y de la manera siguiente, que *dos polígonos pueden ser equiángulos sin tener sus lados homólogos proporcionales, y recíprocamente.*

Tírese en cualquiera polígono ABCDE (fig. 124) la D'E' paralela al lado DE, y es claro que el polígono ABCD'E' es equiángulo con el ABCDE; pero sus lados no son proporcionales.

Descríbanse ahora dos arcos desde los puntos A y C cómo centros, y con los radios respectivos AB y CB, y únase B' con A y con C; los dos polígonos ABCDE y AB'CDE tendrán sus lados iguales uno á uno, y por consiguiente, porporcionales, y no obstante sus ángulos homólogos no son todos iguales.

TEOREMA VIII.

287. *Se puede afirmar que dos polígonos de igual número de lados son semejantes cuando de todos los lados, menos uno del primero, conste* *que son proporcionales á los del segundo, con tal que además se sepa la igualdad de todos los ángulos comprendidos por aquellos lados del primero y sus homólogos del segundo.*

Supongamos que se sepa que los lados del primer polígono ABCDEFG (fig. 123) sean proporcionales á los lados del mismo nombre en el segundo, y que se ignore si AG guarda igual razon con A′G′ y que los ángulos sean iguales

el B á B′, C á C′, D á D′, E á E′, F á F′.

Dividiendo á los dos polígonos en triángulos por medio de rectas que unan los vértices homólogos, verémos en primer lugar que los dos triángulos BCD y B′C′D′ tienen un ángulo igual $C = C'$ comprendido entre los lados proporcionales BC y B′C′, CD y C′D′; luego son semejantes, el ángulo $CBD = C'B'D'$ y

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{BD}{B'D'};$$

pero tambien por hipótesis el ángulo $ABC = A'B'C'$ y

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{BA}{B'A'};$$

luego el ángulo $ABD = A'B'D'$ y

$$\frac{BD}{B'D'} = \frac{BA}{B'A'};$$

por consiguiente, los dos triángulos ABD y A′B′D′ son semejantes (282). De aquí resulta que el ángulo $BDA = B'D'A'$, y como el $CDB = C'D'B'$ á causa de la semejanza de los triángulos BCD y B′C′D′, y el $D = D'$ por hipótesis, se ve que el $ADE = A'D'E'$. Pero de la semejanza de los triángulos se sigue que

$$\frac{CD}{C'D'} = \frac{BD}{B'D'} = \frac{DA}{D'A'};$$

y como se sabe por hipótesis que

$$\frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'},$$

resultará

$$\frac{DA}{D'A'} = \frac{DE}{D'E'}.$$

Luego tambien el triángulo ADE es semejante al A'D'E' (282), y así sucesivamente los demás. Por lo tanto, los polígonos son semejantes.

Teorema IX.

288 *Se puede afirmar que dos polígonos de igual número de lados son semejantes cuando de todos los ángulos menos uno del primero conste que son iguales respectivamente á los del segundo, y que los lados adyacentes á estos ángulos en uno de los polígonos son proporcionales á sus homólogos en el otro.*

No hay mas diferencia entre la demostracion de este teorema y la precedente, que la de resultar semejantes los dos últimos triángulos, por tener dos ángulos respectivamente iguales, en vez de tener un ángulo igual comprendido entre lados proporcionales.

289. Corolario. 1.° *Todos los cuadrados son semejantes;* 2.° *dos rombos que tengan un ángulo igual*; 3.° *dos rectángulos cuyos lados adyacentes sean proporcionales;* 4.° *dos paralelógramos que tienen un ángulo igual comprendido entre lados proporcionales, son semejantes.*

290. Escolio. Si n representa el número de los lados de un polígono, serán menester, para espresar que es semejante á otro, $(n-2)+(n-2)=(2n-4)$ ó $(n-1)+(n-3)=(2n-4)$ condiciones, segun que se quiera fundarse en el teorema del núm. 287 ó en el del núm. 288.

291. *Se llaman* puntos homólogos *dos colocados de tal modo que, uniéndolos con los estremos de dos lados homólogos, se formen dos triángulos semejantes y semejantemente colocados. Las rectas cuyos estremos son puntos homólogos, se llaman* rectas homólogas.

Teorema X.

292. *En dos polígonos semejantes, las rectas homólogas son proporcionales á los lados homólogos de estos polígonos.*

Supongamos que los triángulos PFE y P'F'E', QBC y Q'B'C' (figura 123) sean semejantes y estén semejantemente colocados: los puntos P y P', Q y Q' serán homólogos, y digo que las rectas homólogas PQ y P'Q' son proporcionales á los lados homólogos BC y B'C'. En efecto, en los dos polígonos PFEDCQP y P'F'E'D'C'Q'P' todos los lados menos uno se sabe que son proporcionales, y que los ángulos comprendidos por estos lados son iguales uno á uno; luego los polígonos son semejantes (287), y por consiguiente (284)

$$\frac{PQ}{P'Q'}=\frac{DC}{D'C'}=\frac{BC}{B'C'}.$$

TEOREMA XI.

293. *Dos polígonos* ABCDE *y* A'B'C'D'E' (fig. 125) *son semejantes, cuando uniendo los estremos* F *y* G, F' *y* G' *de dos rectas* FG *y* F'G' *con todos los vértices de estos polígonos, los triángulos así formados son semejantes uno á uno, y están semejantemente colocados.*

En efecto, se pueden mirar sus lados AB y A'B', BC y B'C',..... como rectas homólogas respecto á los dos triángulos semejantes AFG y A'F'G'; luego ya son proporcionales todos sus lados. Vemos en seguida que siendo semejantes los triángulos ABF y A'B'F' por tener un ángulo F = F' comprendido entre lados proporcionales FA y F'A', FB y F'B' (282), el ángulo FBA = F'B'A'. Por la misma razon el GBC = G'B'C', y como el FBG = F'B'G', se sigue que el ángulo total B = B'. Del mismo modo se probará que los demás ángulos C y C', D y D',.... de los dos polígonos son iguales, y por consecuencia que los polígonos son semejantes (287).

TEOREMA XII.

294. *Los perímetros de dos polígonos semejantes son proporcionales á sus lados homólogos.*

Siendo proporcionales los lados homólogos de estos polígonos, se puede formar con ellos una série de razones iguales, cuyos numeradores sean los lados del primero, y los denominadores sus homólogos en el segundo; y se deducirá, segun un principio conocido de aritmética (*Arit.*, 105), que

La razon de la suma de todos los lados del primer polígono, ó sea su perímetro, á la de todos los del segundo, ó sea el perímetro de este, *es igual* á la razon de un lado del primero, á su homólogo del segundo

CAPÍTULO III.

PROBLEMAS RELATIVOS Á LAS LÍNEAS PROPORCIONALES Y POLÍGONOS SEMEJANTES.

Problema I.

295. *Dividir una recta dada* AB (fig. 126) *en partes proporcionales á las* p, q, r, *tambien dadas.*

Tiremos por el punto A una recta indefinida AX, y tomemos en ella las partes AP, PQ, QR respectivamente iguales á las dadas *p*, *q*, *r*. Claro es que uniendo B con R, y tirando por los puntos P y Q de division paralelas á la RB, estas dividirán á AB proporcionalmente á las líneas AP, PQ, QR (243), y por consiguiente, á las dadas *p*, *q*, *r*. Mas en lugar de tirar las paralelas por alguno de los procedimientos esplicados en el núm. 151, emplearémos el siguiente, susceptible de mayor exactitud. Únase R con B, y córtese la recta RB en R′ por un arco descrito desde A como centro con AR por radio. Llévense en seguida las longitudes AP y AQ desde A hasta P′ y desde A hasta Q′ sobre AR′, y únase P con P′ y Q con Q′. Las rectas PP′ y QQ′ serán paralelas á RR′ (246); porque los puntos P y P′, Q y Q′ dividen respectivamente á AR y á AR′ en partes proporcionales.

296. Corolario. De aquí se sigue, que si las líneas *p*, *q*, *r* hubiesen sido iguales, la recta AB habria quedado dividida en partes que tambien lo serian. Para dividir, pues, una recta dada AB (fig. 127) en cinco partes iguales por ejemplo, se tirará por uno de sus estremos una recta indefinida cualquiera AX, sobre la que se aplicará una abertura arbitraria de compás, tantas veces como partes iguales se quiera tener en AB: uniendo el último punto de division con el B, no habrá ya mas que tirar por los otros paralelas á la recta de union, lo que se ejecutará por el método que acabamos de esplicar. Solo observarémos que será conveniente hacer el ángulo BAX poco mas ó menos mitad de un recto, y tomar la abertura de compás próximamente doble de las partes pedidas de AB; porque con estas precauciones no cortarán las paralelas con demasiada oblicuidad á AB, ni los puntos que su direccion debe determinar estarán muy inmediatos.

Puede tambien emplearse el método siguiente para dividir una recta dada en partes iguales. Sobre una indefinida BY (fig. 107), aplíquese una misma abertura de compás tantas veces como partes se quiera tener en la recta dada a, y constrúyase sobre BF un triángulo equilátero BAF (231); tómense las longitudes AB′ y AF′ iguales á a, únase B′ con F′, y la recta de union será paralela á BF (246), porque divide á AB y AF en partes proporcionales; será además igual con a, porque siendo los triángulos ABF y AB′F′ equiángulos, sus lados homólogos son proporcionales (250). El primero es equilátero; luego tambien lo es el segundo; $B'F'=a$, y tirando AC, AD y AE, quedará la recta a dividida en partes iguales en los puntos C′, D′ y E′ (252).

Observemos que tanto mejor determinadas quedarán las rectas bajadas desde A, cuanto mas lejano de BY se halle este punto; es decir, cuanto mayor sea la abertura de compás que se haya aplicado sobre BY.

Harémos tambien notar que este segundo método tiene el inconveniente de efectuar la division sobre una recta igual á a, y no sobre esta misma. Es verdad que podria modificarse la construccion, de modo que se dividiese directamente la línea a, pero tambien nos espondríamos á errores mas considerables; con todo, debe hacerse uso del método del triángulo equilátero siempre que se quieran dividir varias rectas dadas en un mismo número de partes iguales ó proporcionales.

Problema II.

297. *Hallar una cuarta proporcional á tres rectas dadas* a, b, c, es decir, hallar una recta x que forme el cuarto término de una proporcion, cuyos tres primeros sean las líneas a, b, c. de modo que se verifique que

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{x}.$$

Suponiendo que a sea mayor que c, se podrá considerar á los dos términos a y b de la primera razon, como dos lados de un triángulo, y los c y x de la segunda como dos partes correspondientes de aquellos, determinadas por una paralela al tercer lado ; y en su consecuencia, se trazarán dos rectas indefinidas OY y OZ (fig. 128) que formen un ángulo cualquiera, si bien, para mayor exactitud en las construcciones, no deberá pasar de un recto : sobre sus lados se tomarán las partes OA $=a$, y OB $=b$; y sobre OA una segunda parte OC $=c$: tirando CX paralela á AB, se tendrá la cuarta proporcional pedida OX.

Tambien se puede mirar á los numeradores a y c como las dos partes de un mismo lado, y entonces los denominadores b y x serán las correspondientes del otro; lo que conducirá á la construccion ejecutada en la figura 129, en la que BX es la línea pedida.

298. Cada uno de los teoremas n.os **255** y **257** da una nueva solucion de este problema. Si quisiéramos fundarnos en la propiedad de las secantes, se dirá, considerando la proporcion

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{x}:$$

que siendo c mayor que b, es una secante, cuya parte esterior es b, al paso que a y la parte desconocida x son la otra secante y su parte esterior. Por lo tanto, sobre una recta OC $=c$ (fig. 130), tomarémos una parte OB $=b$; por el punto O tirarémos una recta OA $=a$ en cualquiera direccion, y la línea OX que se determine haciendo pasar una circunferencia por los puntos A, B y C, resuelve el problema.

Para apoyarnos en el teorema n.° **257**; observarémos que los dos medios b y c de la proporcion

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$$

serán las dos partes de una cuerda, y los dos estremos a y x las de otra. Por consiguiente, tirarémos dos rectas que se crucen en O; sobre la una se tomará OB $=b$ y OC $=c$, á distinto lado de O, y sobre la otra OA $=a$; se hará pasar una circunferencia por los tres puntos A, B y C, y OX será la cuarta proporcional.

299. Corolario. Si las dos líneas b y c fuesen iguales, la incógnita x estaria determinada por la proporcion

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{x},$$

y entonces se la llamaria una *tercera proporcional* á las rectas a y b Es evidente que se la obtendria por la construccion del n.° **297**.

300. Las proposiciones demostradas en los n.os **263**, 1.° y 2.°, y **256**, dan otros medios para hallar una tercera proporcional á dos rectas dadas a y b, que son útiles en gran número de casos.

Cuando se busca una recta x, tal que

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{x};$$

en que b es una media proporcional entre a y x, se puede considerar:

1.° Que b es una tangente, y que una de las dos rectas a ó x es una secante, y la otra su parte esterna. En su consecuencia, se tirarán dos rectas $OA=a$, $OB=b$ (fig. 131), que formen un ángulo cualquiera, y describiendo una circunferencia que toque á OB en B, y que pase por el punto A (155), se tendrá en OX la tercera proporcional pedida.

2.° Que b puede ser la perpendicular bajada desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo sobre la hipotenusa, y a y x los dos segmentos de esta. Se tomará sobre una recta indefinida una parte $OA=a$ (fig. 132); en el punto O se levantará una perpendicular $OB=b$; su estremo B se unirá con A, y levantando sobre AB la perpendicular BX, OX resolverá el problema.

3.° Finalmente, b puede tomarse por una cuerda, cuya proyeccion sobre el diámetro a sea x, si $a>b$; y por el contrario, a seria su proyeccion sobre el diámetro x, si $a<b$.

En el primer caso, sobre $OA=a$ como diámetro (fig. 133), se describirá una semi-circunferencia; se tirará una cuerda $OB=b$, y se bajará desde B la perpendicular BX sobre el diámetro.

En el segundo, se levantará en la estremidad O (fig. 132) de una recta $OA=a$ una perpendicular, que se cortará por un arco de círculo descrito desde A como centro, y con un radio igual á b: uniendo A con B, y tirando BX perpendicular á AB, se tendrá en OX la línea pedida.

Problema III.

301. *Por un punto* O *dado en el plano de un ángulo* BAC (fig. 134), *tirar una secante que sea tal que las dos partes de ella comprendidas entre este punto y los lados* AB *y* AC *del ángulo sean proporcionales á dos rectas dadas* p *y* q.

Suponiendo resuelto el problema, y que sea BOC la secante pedida, deberá verificarse la proporcion,

$$\frac{OB}{OC}=\frac{p}{q};$$

pero tirando por el punto O la recta OD paralela al lado AC hasta que encuentre al AB, prolongado si es necesario, tambien se tendrá

$$\frac{DB}{DA}=\frac{OB}{OC};$$

y á causa de la razon comun, deberá igualmente verificarse que

$$\frac{BD}{DA}=\frac{p}{q}.$$

Las tres rectas q, p y DA son conocidas; y como, segun la última proporcion, la incógnita DB es una cuarta proporcional á aquellas, podrá hallarse segun manifiesta la figura, y siendo conocida la posicion del punto B, tirando por él y por O una secante, la parte BC comprendida entre los lados AB y AC, será la que se buscaba.

PROBLEMA IV.

302. *Por el punto* A, *dado en el plano de dos rectas* BB′ *y* CC′, *que no es pueden prolongar, tirar otra que vaya á concurrir con ellas* (figura 135): es decir que si fuese posible prolongar las BB′ y CC′, la que se busca pasará por el punto de interseccion de aquellas.

Tírense dos paralelas cualesquiera BC y B′C′; únase A con B y con C por medio de las AB y AC; tírense por B′ y C′ las B′A′ y C′A′ paralelas á estas; y la recta que pase por A y A′ resuelve el problema (250 y 253).

PROBLEMA V.

303. *Tirar una tangente comun á dos circunferencias dadas.*

Este problema, del que ya nos hemos ocupado en el n.° 162, puede tambien resolverse de la manera que sigue:

Segun el n.° 253, *las secantes que pasan, como las* AA′ y AA″ (figura 137), *por los estremos de dos radios paralelos y dirigidos en el mismo ó contrario sentido, van á concurrir en un mismo punto* C *ó* C′ *de la recta* OO′ *que une los centros:* por consiguiente, toda tangente comun á las dos circunferencias O y O′ pasará tambien por uno ú otro de estos puntos. Así es que, para tirar una tangente comun á las dos circunferencias dadas, se tirará un radio cualquiera OA y un diámetro A′O′A″ paralelo á este radio; se unirá el punto A con cada uno de los A′ y A″ por rectas que cortarán á OO′ en C y C′, y solo faltará tirar desde cada uno de estos puntos otras que sean tangentes á una de las dos circunferencias.

Obsérvese que seria impracticable esta construccion, si los radios de las dos circunferencias que se dan fuesen casi iguales, pues entonces el punto C se alejaria mucho de O′, y habria en este caso que recurrir al método del n.° 162.

Problema VI.

304. *Hallar una media proporcional entre dos rectas dadas*, a *y* b. Para resolver este problema, nos podemos fundar en las proposiciones demostradas en los n.^{os} 263, 1.° y 2.°, y 256. Queriendo emplear la primera (263, 1.°), observarémos que la recta pedida será la perpendicular bajada desde uno de los puntos de la circunferencia sobre el diámetro, y que a y b serán los dos segmentos de este: de consiguiente, pondrémos las dos rectas a y b una á continuacion de otra, desde A hasta O y desde O hasta B (fig. 138); sobre AB como diámetro describirémos una semi-circunferencia, y levantando en O la perpendicular OX sobre AB, tendrémos resuelto el problema, siendo dicha OX la media proporcional buscada.

Si quisiéramos valernos de la propiedad de la cuerda (263, 2.°), diríamos que la recta pedida será la cuerda; la mayor a de las rectas dadas el diámetro; y la otra b la proyeccion de aquella cuerda sobre el diámetro: por consiguiente, tomarémos dos partes $OA = a$, y $OB = b$ sobre una recta indefinida (fig. 138); sobre OA como diámetro se describirá una semi-circunferencia; levantando en B′ una perpendicular B′X′ á la OA, y tirando la cuerda OX′, esta será la media proporcional que se buscaba.

Por último; para hacer uso de la propiedad de la tangente (256), se dirá: la recta que buscamos debe ser la tangente, a la secante, y b su parte esterna (suponiendo $a > b$). Tomarémos, pues, sobre una recta $OA = a$ (fig. 138), una parte $OB = b$; harémos pasar una circunferencia por los dos puntos A y B; y tirando la tangente OX á esta (157, 2.°, y 160) quedará resuelto el problema.

Problema VII.

305. *Dividir una recta dada* AB (fig. 139) *en media y estrema razon;* es decir, en dos segmentos tales, que uno de ellos sea medio proporcional entre la recta dada y el otro: el segmento que ha de ser medio proporcional es evidentemente el mayor.

Suponiendo que la recta AB esté divida en el punto X en media y estrema razon, y que AX sea el segmento mayor, tendrémos que

$$\frac{AB}{AX}=\frac{AX}{BX}.$$

Como hay dos incógnitas AX y BX en esta proporcion, tratarémos de hacer que desaparezca una, para lo que basta aplicar el principio del número 105 de la *Aritmética*, y resultará

$$\frac{AB+AX}{AX+BX} \text{ ó sea } \frac{AB+AX}{AB}=\frac{AB}{AX}$$

Si consideramos á esta proporcion como resultante del teorema núm. 256, AB será la tangente, AB+AX la secante, AX su parte esterior; de manerá que AB será igual á la parte interior de esta secante, lo que tendrá lugar si el diámetro es igual á AB y la secante pasa por el centro: en su consecuencia, levantarémos en la estremidad B de AB una perpendicular BO igual á la mitad de esta recta; desde O como centro describirémos con el radio OB una circunferencia que será forzosamente tangente á AB, y por los puntos A y O tirarémos una secante; por último, trayendo AC sobre AB, se tendrá resuelto el problema.

Si quisiéramos demostrar *a posteriori* esta construccion, diriamos: la tangente AB es media proporcional entre la secante AD y su parte esterna AC; luego

$$[1] \qquad \frac{AD}{AB}=\frac{AB}{AC},$$

de la cual se deduce

$$\frac{AD-AB}{AB-AC}=\frac{AB}{AC}.$$

Pero siendo $AB=CD$, y $AC=AX$, tenemos que

$$AD-AB=AC=AX$$

y que

$$AB-AC=BX,$$

por lo que, sustituyendo, tendrémos

$$\frac{AX}{BX}=\frac{AB}{AX} \text{ ó } \frac{AB}{AX}=\frac{AX}{BX},$$

proporcion que hace ver que AB está dividida en el punto X en media y estrema razon.

306. Escolio. Si en la proporcion [1] se reemplaza AB por su igual CD, resultará

$$\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{AC},$$

que manifiesta que la secante AD está dividida tambien en el punto C en media y estrema razon.

Esta observacion da el medio de *volver á hallar la recta que hubiese sido dividida en media y estrema razon, cuando se conoce el mayor de sus dos segmentos;* pues basta hacer la construccion necesaria para dividir este mismo segmento en media y estrema razon, y la secante es la línea buscada.

Tambien observarémos que para dividir AX en media y estrema razon, no hay mas que llevar BX sobre AX.

Problema VIII.

307. *Describir una circunferencia que pase por dos puntos dados* A *y* B, *y sea además tangente á una recta dada* CD (fig. 140).

Supongamos resuelto el problema, y que sea T el punto en que la circunferencia pedida toca á la recta CD. Es claro que si conociésemos este punto, la circunferencia estaria determinada (80); pero si prolongamos AB hasta que encuentre en F á la CD, la tangente FT será media proporcional entre la secante FA y su parte esterna FB; luego buscando esta media proporcional, y tomándola sobre CD, se determinará el punto de contacto T. Como no hay razon para tomarla mas bien á un lado que á otro del punto F, tomarémos tambien FT′ igual á la media proporcional, y haciendo pasar una circunferencia por T, A y B, y otra por T′, A y B, se tendrán las dos soluciones del problema.

Esto supone que es cierta la recíproca del teorema núm. 256; pero siendo muy fácil demostrarla, no nos detendrémos á hacerlo.

Si la recta CD fuese paralela á AB, seria imposible la construccion que precede; pero observarémos que, en virtud del teorema número 90, 2.°, la perpendicular levantada sobre AB en su medio irá á pasar por el punto de contacto, y por lo tanto le determinará.

Problema IX.

308. *Describir una circunferencia que pase por dos puntos dados* A *y* B, *y sea además tangente á otra dada* O (fig. 141).

Describiendo una que pase por los dos puntos dados A y B, y que corte á la O en otros dos C y D, y tirando desde el punto F de seccion de las dos cuerdas AB y CD prolongadas, una tangente á la circunferencia O, el punto T en que la toque será precisamente el de contacto de esta circunferencia con la que se busca; porque siendo el cuadrado de esta tangente igual al producto FC.FD, lo será tambien al FA.FB, y la circunferencia que pase por los tres puntos A, B y T, tocará á la recta FT, y por consiguiente á la circunferencia O en el punto T.

Este problema tendrá dos soluciones, porque desde el punto F siempre se podrá tirar dos tangentes á la circunferencia O, á menos que uno de los puntos dados sea interior á esta circunferencia, y el otro esterior, en cuyo caso seria imposible. Observarémos, sin embargo, que si la recta AB fuese tangente á la circunferencia dada, uno de los puntos de contacto se hallaria sobre esta recta, de modo que la circunferencia tangente en este punto se reduciria á la misma recta AB (103).

Si la perpendicular bajada desde el centro O sobre AB pasase por el medio de la distancia que separe A de B, las dos cuerdas AB y CD cortarian en ángulo recto á esta perpendicular (98), y serian por lo mismo paralelas; luego las tangentes FT y FT′ lo serian á estas, y los puntos de contacto T y T′ se hallarian precisamente en las intersecciones de la circunferencia O con la perpendicular de que se trata.

Es fácil ver que el problema del núm. 307 es un caso particular de este (103), observando que

$$FT=\sqrt{FA.FB}.$$

Problema X.

309. *Construir sobre una recta dada* A′B′, *homóloga de* AB, *un triángulo semejante á otro dado* ABC (fig. 109).

Los teoremas de los números 278 y 282, y la definicion del número 275, pueden indistintamente servir para la resolucion de este problema; si bien el primero da la mas sencilla, pues basta con hacer en los puntos A′ y B′ ángulos que sean respectivamente iguales á los A y B (147 y 148).

PROBLEMA XI.

310. *Construir sobre una recta dada* A′B′, *homóloga de* AB, *un polígono semejante á otro dado* ABCDE (fig. 142).

Fundándose en cualquiera de los teoremas demostrados en los números 287 y 288, se puede hallar solucion de este problema; pero es mas sencillo deducirla de la misma definicion de los polígonos semejantes.

En su consecuencia, se empezará por dividir el polígono dado en triángulos por medio de diagonales tiradas desde un mismo vértice, si es posible; si no, se le descompondrá en otros polígonos que gocen de esta propiedad, y quedará el segundo caso referido al primero. Sea, pues, ABCDE el polígono de que se trata, descompuesto en triángulos por las diagonales BD y BE: constrúyase sobre A′B′ un triángulo semejante á ABE, formando para ello los ángulos E′A′B′ y A′B′E′ respectivamente iguales á los EAB y ABE; y bastará, para que los triángulos estén semejantemente colocados en los dos polígonos, que los ángulos que tienen sus vértices en B′ y E′ sean respectivamente homólogos de EBD y BED; por lo tanto, se construirá sobre B′E′ un triángulo semejante á BED, que satisfaga á esta condicion, y se continuará del mismo modo.

Si A′B′ = AB, el nuevo polígono será igual al dado: de modo que este mismo método sirve para construir un polígono igual á uno que se nos dé (236).

Cuando se quiere *reducir* un plano ó un dibujo, es decir, sacar de él una copia cuyas dimensiones lineales estén con las del original en una razon dada $\frac{m}{n}$, puede emplearse con ventaja el método de *las cuadrículas*. Se empezará por cubrir de pequeños cuadrados (238) el plano ó figura que hay que copiar: despues se construirá sobre el papel en que haya de quedar la copia un rectángulo cuyos lados guarden con los del primero la relacion de m á n; se dividirá en cuadrados como el primero, y no habrá ya mas que figurar en cada uno de estos los puntos que se hallen en los correspondientes del original, lo cual puede hacerse á ojo, si los cuadrados son bastante pequeños y no se necesita una gran exactitud. Si se quiere referir exactamente cada punto, se hará uso del *compás de reduccion*, instrumento que está formado por dos piernas iguales (fig. 143) AA', BB', graduadas, que terminan en punta por cada una de sus estremidades, y que se puede hacer que se crucen en el punto O que se quiera, por medio de ranuras practicadas á través de cada pierna, de modo que se tenga siempre $OA = OB$, y por consiguiente, $OA' = OB'$. Así, pues, se ajustarán las dos piernas de manera que $\frac{OA}{OA'} = \frac{m}{n}$, y es claro que entonces, para cada abertura de estas, la razon de la distancia entre los puntos A y B á la de los A' y B' será tambien igual á $\frac{m}{n}$; en seguida se operará como hicimos en el número 288, midiendo sobre el original las distancias de cada punto á la horizontal y á la vertical mas próximas con las puntas A' y B', y llevando estas distancias sobre la copia con las A y B.

Problema XII.

311. *Construir un polígono semejante á otro dado, y cuyo perímetro sea igual á una recta dada* p.

Hállese una cuarta proporcional al perímetro del polígono dado ABCDE (fig. 144), á p y á AB, y se tendrá el lado que debe ser homólogo de AB en el polígono que se busca (294), despues de lo cual queda reducido este problema al anterior.

Problema XIII.

312. *Construir un triángulo semejante á otro dado* ABC (fig. 145), *y en el que los vértices homólogos de* A, B, C, *estén situados respectivamente sobre las tres circunferencias concéntricas dadas* O.

Búsquese un punto D, tal que sus distancias á los tres vértices A, B, C del triángulo sean proporcionales á los respectivos radios R, R', R'' de las tres circunferencias, cosa fácil segun la proposicion 249. Descríbase desde dicho punto, como centro, y con los radios R, R', R'' tres circunferencias que corten á las direcciones de DA, DB, DC, respectivamente en A', B' y C'; júntense, finalmente, estos puntos dos á dos, y se tendrá un triángulo A'B'C', semejante al ABC (279), é inscripto en el sistema de tres circunferencias iguales á las que se dieron; solo faltará, para que el problema quede resuelto, trasladar la segunda figura sobre la primera en A''B''C''.

Se conoce este método por el nombre de *método inverso*, y suministra soluciones muy sencillas de problemas, que de otra manera se resolverian con mucha dificultad.

Problema XIV.

313. *Construir una escala.*

Una escala es una recta dividida en partes iguales, de las que una vuelve á subdividirse en partes tambien iguales.

Las escalas son necesarias para representar sobre el papel, y en su justa proporcion, distancias mayores que la hoja de este. El geógrafo, el arquitecto, el constructor de máquinas, colocan siempre debajo de sus dibujos una escala de partes iguales, que sirven de comun medida á todas las distancias del país ó á todas las partes del edificio ó de la máquina que allí se ha representado.

En las cartas geográficas la escala representa por lo regular miriámetros ó kilómetros; en los planos topográficos, decámetros subdivididos en metros; y finalmente, en el dibujo lineal, metros subdivididos en decímetros, centímetros y aun en milímetros.

Lo comun es representar en los planos una distancia de 2500 metros por una línea de un metro; de manera que 100 metros lo estarán por una de $\frac{1^m}{25}=0^m,04$: así, será menester dividir en 100 partes iguales una línea de 4 centímetros, para poder representar los metros; y bien se conoce cuán fecundo en errores seria en el caso actual el procedimiento que hemos esplicado en el número 296, y por otra parte, resultarian tan próximos unos á otros los puntos de division, que seria muy difícil el distinguirlos. Felizmente se ha imaginado un procedimiento, conocido bajo el nombre de *método de las trasversales*, que es tan sencillo como exacto y que vamos á aplicar á la construccion de una escala de 500 metros en $\frac{1}{2500}$, cuya menor division espresará 1 metro.

Estando representados 100 metros por una longitud de 4 centímetros, la escala de 500 metros tendrá de largo 2 decímetros; por lo que se dividirá una recta AB (fig. 146) de esta longitud en cinco partes iguales. En sus dos estremos levantarémos las perpendiculares indefinidas AC y BD, tomando sobre cada una de ellas diez veces una misma distancia por medio del compás. Se unirán dos á dos los puntos correspondientes de estas perpendiculares, y se trasladarán sobre CD las divisiones de AB, numerándolas 0, 100, 200, 300 y 400; y 1, 2, 3, 4.....9 las de FE. Hecho esto, tírese AE, y se

1/80 1 pie = un ..

verá fácilmente, comparando los triángulos equiángulos cuyo vértice comun es A, que la parte de cada paralela comprendida entre la trasversal AE y la recta AC, vale tantas décimas de EC como indique el número de la division de EF que corresponde á esta paralela ([1]) : de suerte que, llevando sobre AF y sobre CE todas estas partes de las paralelas, quedarán dichas rectas divididas en diez partes iguales, de las que cada una será $\frac{1}{10}$ de AF, y representará por lo mismo 10 metros. En las divisiones de FA se colocarán los números 10, 20, 30.....90, y no habrá mas que unir los puntos de division de AF con los de CE por trasversales, y estará construida la escala; porque la parte de cada paralela comprendida entre la trasversal GF y EF vale tantas décimas de GE como indique el número de EF que se encuentra sobre esta paralela. Así, la parte que corresponde al número 3 vale $\frac{3}{10}$ de GE ó de 10 metros, esto es, 3 metros. Ahora bien, si se quiere figurar sobre el plano una distancia de 347, se colocará una de las puntas del compás sobre la sétima paralela á partir desde la perpendicular á esta numerada 300, y la otra punta se llevará á la interseccion de esta misma paralela con la trasversal numerada 40.

Al contrario, para conocer la longitud de una recta PQ, se aplicará sobre la escala, á partir de la línea OO, una abertura de compás igual á aquella, lo que dará la longitud con un error de menos de cien metros. Supongamos que PQ esté comprendida entre 200 y 300 metros, se hará resbalar el compás sobre las paralelas sucesivas hasta que, estando una de las puntas sobre la línea 200—200, la otra esté sobre una de las trasversales. Si esta fuese la 30 por ejemplo, y la paralela la cuarta, concluiriamos de aquí que PQ valia 234 metros.

Si ninguna de las líneas que han de figurar en el plano pasa de 800 metros, se podrá emplear la escala de milésimas, es decir, representar *un metro* por *un milímetro*; porque entonces 800 metros lo estarian por 8 decímetros, y hay papel de $0^m,975$ de largo. En este caso pueden servir las reglas de ***Kutsch*** como escelentes escalas.

314. PROBLEMAS PARA RESOLVER. 1.° *¿Cuál es el lugar de todos los*

([1]) Por ejemplo, los triángulos ECA y AKI dan la proporcion

$$\frac{AC}{AK}=\frac{EC}{KI};$$

pero AK vale seis décimas de AC; luego KI será tambien las seis décimas de EC.

puntos que dividen en la razon constante de dos rectas p *y* q, *á las que unen un punto* O *con todos los de una circunferencia dada?*

2.° *Hallar el lugar de todos los puntos* M (fig. 147) *tales, que, uniendo cada uno de ellos con uno* A, *dado en el plano de una circunferencia* O, *el producto de las distancias* AM *y* AB *sea igual al cuadrado de una recta dada* K.

3.° *Dados un punto* O *y una recta* AB (fig. 148), *hallar el lugar de los puntos* M *tales, que, uniendo* M *con* O, *el producto de las distancias* OC *y* OM *sea igual al cuadrado de una recta* K *tambien dada.*

4.° *Hallar el lugar de todos los puntos desde los cuales se pueda tirar tangentes iguales á dos circunferencias dadas. —¿ Cuál será este lugar, si las circunferencias se cortan?—Aprovechar esta observacion para construir el lugar, cuando no se corten.—Se llama este lugar el* EJE RADICAL *de las dos circunferencias.—Los ejes radicales de tres circunferencias concurren en un mismo punto, llamado su centro radical.*

5.° *Hallar el lugar de los puntos desde los cuales se vea bajo un mismo ángulo á dos círculos dados.*

6.° *Dadas tres rectas que concurran en un mismo punto, tirar por otro dado una secante tal, que las dos partes interceptadas por estas rectas sean proporcionales á las dadas* p *y* q. (Método inverso).

7.° *Tirar una secante que corte á tres rectas dadas en un mismo plano, de tal modo, que cada una de las partes interceptadas por estas rectas sea igual á una longitud dada.*

8.° *Dándose cuatro rectas, cualquiera que sea su colocacion en un plano, tirar una secante tal, que las partes interceptadas por estas rectas sean proporcionales á otras dadas* p, q, r.

LIBRO CUARTO.

POLIGONOS REGULARES Y RELACION DE LA CIRCUNFERENCIA AL DIAMETRO.

CAPÍTULO PRIMERO.

POLÍGONOS REGULARES.

315. Suponiendo que despues de haber dividido una circunferencia en partes iguales se una cada punto de division con el siguiente, quedará formado un polígono, cuyos lados serán todos iguales, y lo mismo los ángulos (**92** y **117**). Un polígono formado de este modo se llama *regular:* así es que *se llama* POLÍGONO REGULAR *al que es á un mismo tiempo equiángulo y equilátero.* El triángulo equilátero y el cuadrado son polígonos regulares. Bien se ve que hay polígonos regulares de cualquier número de lados, y que estos polígonos precisamente han de ser convexos.

316. El problema que se presenta en los trabajos de ensolado y de incrustacion, consiste en cubrir un espacio determinado con figuras rectilíneas, y es susceptible de una infinidad de soluciones, si quiere hacerse uso de cualesquiera polígonos; pues no hay entonces que satisfacer á otra condicion que la de reunir alrededor de un mismo punto ángulos cuya suma valga cuatro rectos. Pero se limita mucho la cuestion si no se han de usar mas que polígonos regulares y todos de un mismo número de lados; porque entonces se necesita elegir un polígono tal, que, repitiendo uno de sus ángulos cierto número de veces, se llegue á cuatro rectos, ó en otros términos, que el cociente de cuatro rectos por un ángulo del polígono sea un número entero. El valor del ángulo de un polígono regular se obtiene dividiendo la suma de todos los del polígono (**218**) por el número de sus lados, y así hallarémos, tomando por unidad el ángulo recto, que en los polígonos de

3, 4, 5, 6 lados,

vale cada uno de sus ángulos respectivamente $\frac{2}{3}$, 1, $\frac{6}{5}$, $\frac{4}{3}$;

y como $4:\frac{2}{3}=6$, $4:1=4$, $4:\frac{6}{5}=\frac{10}{3}$, $4:\frac{4}{3}=3$, se ve que podrán emplearse polígonos regulares de 3, 4 y 6; pero no el pentágono ni los que tengan mas de 6 lados; porque los ángulos de estos últimos son mayores que el del exágono, por interceptar entre sus lados arcos cada vez mayores, y el cociente de cuatro rectos por uno de estos será necesariamente menor que 3, y es además evidente que valdrá mas de dos [1]. De consiguiente, pueden servir *seis* triángulos equiláteros, *cuatro* cuadrados, ó *tres* exágonos; y estos son los únicos polígonos regulares que pueden emplearse *solos* en el ensolado ó chapeado.

Teorema I.

317. *Todo polígono regular es á un mismo tiempo inscribible y circunscribible á la circunferencia.*

Sea ABCDEF (fig. 149) un polígono regular de cualquier número de lados. Siempre se podrá hacer pasar una circunferencia por tres vértices consecutivos A, B, C (80), y digo que pasará tambien por el vértice siguiente D. Unamos, en efecto, el centro O con los puntos A, B, C, D; y los dos triángulos ABO, BCO tendrán sus tres lados respectivamente iguales, y ellos mismos lo serán, por lo que el ángulo ABO$=$OBC (190); así, cada uno de ellos será mitad del ABC. Pero el triángulo BCO es isósceles, y por lo mismo el ángulo BCO$=$OBC (179), y como tal, mitad de ABC ó de su igual BCD; luego el ángulo OCD es la otra mitad de este, y los triángulos BCO y OCD tendrán un ángulo igual comprendido entre lados respectivamente iguales, serán iguales, y nos darán OD$=$OB; por consiguiente, la circunferencia que pasa por los tres vértices consecutivos A, B, C, tambien pasa por el siguiente D, y como por un razonamiento análogo se demostrará que, pasando por los B, C, D, tambien pasa por el siguiente E, y así de los demás; todos los vértices del polígono se hallarán sobre la circunferencia que hemos hecho pasar por los tres vértices A, B, C: luego el polígono está inscripto en esta circunferencia.

---

[1] Sea n el número de los lados de un polígono regular: la espresion del valor de uno de sus ángulos será $\frac{2(n-2)}{n}=2-\frac{4}{n}$. A medida que n aumenta, la fraccion $\frac{4}{n}$ tiende hácia cero, y por consiguiente, la diferencia $2-\frac{4}{n}$ tiende al mismo tiempo hácia 2; luego *dos rectos son el límite hácia que tiende el valor del ángulo de un polígono regular, cuando el número de lados de este polígono aumenta indefinidamente.*

En segundo lugar, todos los lados AB, BC, CD..... son cuerdas iguales de la circunferencia que acabamos de describir; luego estarán equidistantes del centro O (96); por lo tanto, las perpendiculares OK, OG...., bajadas desde este sobre dichos lados, serán iguales, y la circunferencia que se describa desde O como centro, con el radio OG tocará á cada uno de los lados del polígono (88) en su punto medio (82) y quedará la circunferencia inscripta en el polígono, ó lo que es lo mismo, este circunscripto á aquella [1].

318. Escolio I. Esta demostracion es aplicable perfectamente á una línea *quebrada regular*, es decir, á la formada por rectas iguales é igualmente inclinadas entre sí: por lo que *toda línea quebrada regular es á la vez inscribible y circunscribible á la circunferencia.*

Obsérvese que una línea de esta clase seria una porcion del perímetro de un polígono regular, si el arco de la circunferencia circunscripta, subtendido por uno de sus lados, fuese una parte alícuota de esta circunferencia

319. Escolio II. Se llama comunmente centro *de un polígono regular* al de las circunferencias que le están inscriptas y circunscriptas; mas esta denominacion es viciosa, porque dicho punto no es verdaderamente un centro, sino cuando el polígono tiene un número par de lados (203).

320. Escolio III. Angulo en el centro de un polígono regular es el AOB formado por los dos radios que se tiren desde el centro comun de las circunferencias inscripta y circunscripta á los estremos de un mismo lado AB. Todos los ángulos en el centro de un polígono regular son iguales (106); y como su suma es igual á cuatro rectos (45), se hallará el valor de cada uno dividiendo cuatro rectos por el número de lados del polígono, que es el mismo que el de los ángulos.

321. Llamarémos en lo sucesivo *radio* y *apotema* de un polígono regular á los radios respectivos de las circunferencias circunscripta é inscripta al mismo.

Teorema II.

322. *Dos polígonos regulares de igual número de lados son seme-*

---

[1] Es evidente que solo puede circunscribirse una circunferencia á un polígono regular. Tampoco se puede inscribir mas de una, porque el centro de toda circunferencia inscripta en un polígono regular ABCDEF, ha de hallarse en las bisectrices de los ángulos A y B (159), y estas no se encuentran mas que en un punto.

jantes, y sus perímetros proporcionales á los radios de los círculos inscriptos y circunscriptos.

1.° Si n es el número de lados de un polígono regular, la suma de los ángulos de este polígono valdrá, tomando por unidad el ángulo recto, $2(n-2)$, y por consiguiente, cada uno será igual á $\frac{2(n-2)}{n}$, y siendo el mismo el número de lados en los dos polígonos, se ve que serán equiángulos. Como además cada polígono tiene todos sus lados iguales, los del uno serán respectivamente proporcionales con los del otro; luego son semejantes (287).

2.° Sean AB y A'B' dos lados homólogos de dos polígonos regulares de igual número de lados (fig. 150), O y O' los centros de los círculos inscriptos y circunscriptos á cada uno de ellos, OI y O'I', OA y O'A' los radios de estos círculos. Siendo semejantes los triángulos isósceles OAB y O'A'B', por tener iguales sus ángulos en el centro, y lo mismo los rectángulos OAI y O'A'I'; tendrémos la série de razones iguales

$$\frac{AI}{A'I'} \text{ ó } \frac{AB}{A'B'} = \frac{OI}{O'I'} = \frac{OA}{O'A'};$$

en la cual se demuestra que *los lados de dos polígonos regulares semejantes son proporcionales á sus radios y á sus apotemas;* y como estos lados son tambien proporcionales á los perímetros de los dos polígonos (294), estos perímetros serán tambien proporcionales á sus radios y á sus apotemas.

Problema I.

323. *Estando inscripto un polígono regular* ABCDEF (fig. 149) *en un círculo, se quiere: 1.° circunscribir á este círculo un polígono regular del mismo número de lados; 2.° calcular el lado del nuevo polígono en funcion del de aquel y del radio de la circunferencia.*

1.° *Primera solucion.* Bájese desde el centro O la perpendicular OI sobre AB; en el punto I tírese una tangente que termine en las prolongaciones de los radios OA y OB; y en virtud de esta construccion será OA' = OB', porque los triángulos OIA' y OIB' tienen un lado igual adyacente á dos ángulos que respectivamente lo son, pues siendo I el medio de AB, los ángulos A'OI y B'OI interceptan arcos iguales entre sus lados; de modo que, describiendo una circunferencia desde O como centro y con el radio OA' pasará por el punto B'. Tírense los radios OCC', ODD'...., y únanse los puntos B' con C', C' con D'..... y resultará el polígono A'B'C'D'E'F' regular y circunscripto á la circunferencia OA. Con efecto, siendo sus ángulos en el centro los mismos precisamente que los del ABCDEF, si trazásemos una circunferencia con el centro O y el radio OA', los arcos A'B', B'C', C'D'..... comprendidos entre sus lados, serian iguales (107); luego tambien lo serán los lados A'B', B'C'..... (92), y los ángulos A', B', C'..... (118); por lo que el polígono será regular. Es además circunscripto; porque todos sus lados son cuerdas iguales de la circunferencia OA', y como tales, equidistantes de su centro; pero como una de ellas A'B' es tangente á la circunferencia OA, lo son tambien todas las demás.

Segunda solucion. Quedará tambien resuelto el problema con tirar una tangente en cada vértice del polígono. Para convencernos de ello, no hay mas que observar que todos los ángulos A'AB, A'BA, B'BC.... (fig. 151) son iguales (120); luego todos los triángulos A'AB, B'BC.... son isósceles; y como los lados AB, BC.... son iguales, tambien lo serán los triángulos (183), y por consiguiente,

$$A'A = A'B = B'B = B'C = C'C = \text{etc.}$$

y por la misma razon

$$A'B' = B'C' = C'D' = \text{etc.}$$

Tambien son iguales además los ángulos A', B', C'.... (183); luego el polígono A'B'C'D'E'F' es regular; y como ya estaba circunscripto, satisface á todas las condiciones que se pedian.

2.° Representando por R y por a las longitudes respectivas del radio y del lado AB (fig. 149) del polígono inscripto, y por x la del A'B' del circunscripto, tendrémos en virtud de la semejanza de los triángulos ABO y A'B'O la proporcion (292)

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OI}{OK},$$

ó reemplazando las líneas OI, AB y A'B' por sus longitudes,

$$\frac{x}{a} = \frac{R}{OK};$$

pero siendo rectángulo el triángulo AOK, será (262)

$$OK = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AK}^2}, \text{ ó bien por ser } AK = \frac{AB}{2}, \ OK = \sqrt{\overline{OA}^2 - \frac{\overline{AB}^2}{4}},$$

ó tambien sustituyendo OA por R, AB por a, y reduciendo el entero á la especie del quebrado que le acompaña,

$$\mathrm{OK}=\frac{\sqrt{4\mathrm{R}^2-a^2}}{2}\ (^1);$$

y poniendo esta espresion de OK en la anterior proporcion, tendrémos

$$\frac{x}{a}=\frac{\mathrm{R}}{\frac{\sqrt{4\mathrm{R}^2-a^2}}{2}},$$

ó finalmente

[1] $$x=\frac{2\mathrm{R}.a}{\sqrt{4\mathrm{R}^2-a^2}}.$$

Suponiendo $a=3^{\mathrm{d.m}}$, y $\mathrm{R}=4^{\mathrm{d.m}}$, y buscando el valor de x *con una aproximacion mayor que un quinto* de decímetro, se tendrá $2\mathrm{R}=8^{\mathrm{d.m}}$, y por lo mismo

$$x=\frac{8.3}{\sqrt{64-9}}=\frac{24}{\sqrt{55}};$$

mas como puede mirarse esta fraccion como la raiz cuadrada de su cuadrado, es decir, de $\frac{24^2}{55}$, no habrá mas, para resolver la cuestion, que aplicar al quebrado $\frac{24^2}{55}=\frac{576}{55}$ la regla dada en el núm. 210 de la *Aritmética*, y se hallará por este medio que

$$x=\tfrac{16}{5}^{\mathrm{d.m}}=3^{\mathrm{d.m}},2.$$

Puede calcularse por logaritmos el valor [1] de x; porque la cantidad $4\mathrm{R}^2-a^2$, que es la diferencia entre los cuadrados de $2\mathrm{R}$ y a, es igual á la suma $(2\mathrm{R}+a)$ de estas cantidades multiplicadas por su diferencia $(2\mathrm{R}-a)$; luego

$$x=\frac{2\mathrm{R}.a}{\sqrt{(2\mathrm{R}+a)(2\mathrm{R}-a)}};$$

y por lo tanto (*Arit.*, números 281, 282 y 284),

$$L.x=L.2\mathrm{R}+L.a-\frac{L(2\mathrm{R}+a)+L(2\mathrm{R}-a)}{2}.$$

(1) Así, *para calcular la apotema de un polígono regular, réstese del cuadrado del diámetro el del lado, y tómese la mitad de la raiz cuadrada del resto.*

324. Corolario. Recíprocamente, si dado el polígono circunscripto, se propusiese inscribir en el mismo círculo uno regular del mismo número de lados, se conseguiria, tirando desde el centro rectas á todos los vértices del circunscripto, y uniendo de dos en dos los puntos en que estas cortasen á la circunferencia. Tambien se podrian unir de dos en dos los puntos de contacto, y el polígono así formado seria regular; porque, estando dividido cada uno de los lados A′B′, B′C′.... en dos partes iguales en el punto de contacto (317), todos los triángulos A′AB, B′BC.... son iguales (181), y por lo mismo lo son los lados AB, BC....; luego el polígono es regular (315).

Problema II.

325. *Estando inscripto en un círculo un polígono regular, se quiere: 1.° inscribir en este círculo otro polígono tambien regular de doble número de lados que aquel; 2.° calcular el lado del nuevo polígono en funcion del lado del primero, y del radio de la circunferencia.*

1.° Bajando desde el centro O (fig. 149) perpendiculares sobre todos los lados del polígono que se da, y uniendo cada punto de division con los dos estremos del lado correspondiente, se tendrá resuelto el problema.

2.° Sean AB el lado del polígono inscripto, y OI la perpendicular sobre AB, por lo que AI será el lado del polígono inscripto de doble número de lados. Designemos por a y por y respectivamente las longitudes de AB y de AI, y como siempre, por R la del radio; por consiguiente, aplicando el teorema del núm. 265 al triángulo AOI, resultará

$$\overline{AI}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OI}^2 - 2OI.OK,$$

ó sustituyendo por AI y OA, y y R respectivamente, y OK por su valor $\dfrac{\sqrt{4R^2-a^2}}{2}$ que acabamos de hallar (323), será

$$y^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2-a^2};$$

y por último, sacándo á R como factor comun, y estrayendo la raiz cuadrada del segundo miembro,

$$[1] \qquad y = \sqrt{R(2R-\sqrt{4R^2-a^2})}.$$

Supongamos, para ejemplo, que $R = 3^{d.m}$ y $a = 2^{d.m}$, y busquemos el valor de y *con un error de menos de* una décima: sustituyendo, se tendrá en primer lugar $y=\sqrt{3(6-\sqrt{32})}$. Ahora, para tener la aproximacion pedida, habrá que multiplicar por 100 (*Arit.*, número **203**) la cantidad $3(6-\sqrt{32})$, lo que dará $300(6-\sqrt{32})=1800-300.\sqrt{32}=1800-\sqrt{2880000}$; porque, bastando para estraer la raiz cuadrada de un producto estraer la de cada uno de los factores y multiplicar luego las raices entre sí, será $300\sqrt{32}=\sqrt{300^2.32}=\sqrt{2880000}$. La raiz cuadrada de 2880000 tomada *por esceso*, y á menos de una unidad, es 1698: la resto de 1800, y veo que la raiz del mayor cuadrado contenido en el resto 102 es 10. Esta es la raiz cuadrada á menos de una unidad de $1800-\sqrt{2880000}$; porque siendo el cuadrado de 11 mayor que 102, es tambien mayor que $1800-\sqrt{2880000}$, al paso que el de 10 es menor que esta diferencia; luego, finalmente, el valor que se pide de y será $\frac{10}{10}{}^{\text{d.m}}=1^{\text{d.m}}$ (¹).

326. Escolio I. Nada espresa en el cálculo del valor de y que AB sea el lado de un polígono regular; así es que la fórmula que se acaba de hallar resuelve este problema mas general : *Dados el radio de una circunferencia y la cuerda de un arco cualquiera, hallar la que subtiende la mitad de este arco.* Solamente observarémos que entonces se trata de la cuerda que subtiende á la mitad del menor de los dos arcos subtendidos por la que se dió a. Si quisiéramos hallar la otra, seria el valor de y

$$y=\sqrt{R(2R+\sqrt{4R^2-a^2})}:$$

porque del triángulo obtusángulo AOI′ sacaríamos.

$$\overline{AI'}^2=\overline{AO}^2+\overline{OI'}^2+2OI'.OK.$$

327. Escolio II. Para circunscribir á un círculo un polígono regular que tenga doble número de lados que el inscripto ABC (figura 152), se levantarán primero tangentes en cada uno de los vér-

(¹) Los discípulos que conozcan la fórmula de álgebra que sirve para obtener la *raiz cuadrada de una cantidad que es parte comensurable y parte incomensurable de segundo grado, por medio de dos radicales independientes uno de otro*, hallarán, aplicándola al cálculo del valor de y, que

$$y=\sqrt{\frac{R(2R+a)}{2}}-\sqrt{\frac{R(2R-a)}{2}},$$

ecuacion en que cada término se puede calcular por logaritmos.

tices del polígono inscripto; despues se unirán con el centro por medio de rectas los vértices A', B', C' del polígono circunscripto que resulta, y en los puntos P, Q, R, en que aquellas rectas corten á la circunferencia, se tirarán tangentes: el nuevo polígono DEFGIK será regular (323, segunda solucion), pues los puntos de contacto de todos sus lados dividen á la circunferencia en partes iguales.

328. ESCOLIO III. Observemos, por último, *que los contornos de dos polígonos regulares, inscripto y circunscripto, son respectivamente menor y mayor que los del inscripto y circunscripto que tienen doble número de lados;* porque en el primer caso, cada recta AB es menor que la quebrada APB, y en el segundo, cada quebrada AC'B es mayor que la ADEB.

PROBLEMA III.

329. *Dados los perímetros* p *y* P *de dos polígonos regulares semejantes, el primero inscripto y el segundo circunscripto á un mismo círculo, calcular los perímetros* p' *y* P' *de los regulares inscripto y circunscripto de doble número de lados.*

1.° Sean AB y CD (fig. 159) los lados de los dos polígonos, cuyos perímetros hemos designado por p y P: uniendo el punto A con el de contacto E, y tirando en los A y B las tangentes AF y BG, AE y FG serán los lados de los polígonos inscripto y circunscripto que tengan doble número de ellos. Llamando p' y P' á los perímetros de estos polígonos, tendrémos segun el teorema del número **322**.

$$\frac{P}{p}=\frac{CO}{OE},$$

porque OE = OA. Mas tirando la OF, será la bisectriz del ángulo COE, de modo que (**248**)

$$\frac{CO}{OE}=\frac{CF}{FE};$$

y por causa de la razon comun será

$$\frac{P}{p}=\frac{CF}{FE};$$

de cuya proporcion se saca

$$\frac{P+p}{p+p}=\frac{CF+FE}{FE+FE}, \text{ ó sea } \frac{P+p}{2p}=\frac{CE}{FG},$$

porque FE=EG. Pero las rectas CE y FG están contenidas el mismo número de veces cada una en los perímetros P y P′ de que forman parte ; luego son entre sí como P y P′, y podrémos decir que

$$[1] \qquad \frac{P+p}{2p}=\frac{P}{P'}, \quad \text{de donde} \quad P'=\frac{2Pp}{P+p}.$$

2.° Para calcular p', obsérvese que los dos triángulos FEI y AEK son equiángulos, y dan

$$\frac{EI}{FE}=\frac{AK}{AE};$$

pero estando las rectas EI y FE contenidas el mismo número de veces en los perímetros p' y P′, serán entre sí como p' á P′ ; y como la razon de AK á AE es tambien la misma que la de p á p', será

$$\frac{p'}{P'}=\frac{p}{p'}, \text{ de la cual se deduce } p'=\sqrt{P'p},$$

ó bien, sustituyendo P′, por su valor [1],

$$[2] \qquad p'=p\sqrt{\frac{2P}{P+p}}.$$

PROBLEMA IV.

330. *Inscribir un cuadrado en una circunferencia.*

Trácense dos diámetros AC y BD que se corten perpendicularmente (fig. 153), quedará la circunferencia dividida en cuatro partes iguales, y el cuadrilátero que se forme uniendo cada punto de division con el siguiente, será un cuadrado (315).

331. ESCOLIO. Para calcular el lado del cuadrado inscripto en una circunferencia cuyo radio sea conocido, se observará que AB es la hipotenusa del triángulo isósceles rectángulo AOB, por lo que se tendrá (261) :

$$AB=\sqrt{2R^2}.$$

Pero como la raiz cuadrada de un producto de varios factores es igual al producto de las raices cuadradas de estos,

$$AB=R\,.\sqrt{2}.$$

Luego *el lado del cuadrado inscripto es igual al radio multiplicado por la raiz cuadrada de 2.*

332. Corolario I. De aquí se sigue que *la razon entre el lado del cuadrado inscripto y el radio, ó sea entre la diagonal de un cuadrado y el lado de este*, pues AB es la diagonal del cuadrado AOBG construido sobre AO, *es igual á la raiz cuadrada de* 2, *por lo que esta razon es incomensurable.* (*Aritmética*, núm. 193) [1].

333. Corolario II. Si el radio del círculo fuese igual á la unidad lineal, el lado del cuadrado inscripto lo seria á la raiz cuadrada de *dos*. Así, la *Geometría* da un procedimiento rigoroso para obtener *exactamente* la magnitud de la irracional $\sqrt{2}$. Lo mismo sucede con la raiz cuadrada de todo número n que no sea cuadrado perfecto; porque esta raiz es una media proporcional entre la unidad lineal y la recta que contuviese n veces á esta unidad (*Aritmética*, número 251). Observemos, sin embargo, que seria menester para esto que se pudiesen trazar *verdaderas* líneas sobre una superficie *exactamente* plana, de modo que esta posibilidad no es mas que intelectual. Por esta razon, si habiendo inscripto un cuadrado en un círculo cuyo radio fuera la unidad lineal, se lleva su lado sobre la escala, se hallará para $\sqrt{2}$ un valor mucho menos aproximado que el que da el cálculo.

Problema V.

334. *Inscribir un exágono regular en una circunferencia.*

Suponiendo que el problema está resuelto, y que AB (fig. 154) es el lado del exágono regular, su ángulo en el centro AOB será la sesta parte de cuatro rectos (320), es decir, los $\frac{4}{6}$ ó los $\frac{2}{3}$ de uno solo; luego quedará para la suma de los otros dos ángulos A y B del triángulo AOB (170) $2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$ de un ángulo recto. Pero siendo igua-

[1] Esto tambien resulta al hallar la comun medida de las dos rectas AB y AO (85).

En efecto, si desde B como centro, y con AO por radio, se describe una circunferencia, se tendrá (256):

$$\frac{AF}{AO}=\frac{AO}{AI}:$$

y siendo $AI<AO$, AB contiene *una* vez á AO con el *resto* AI.

Tenemos que ver el número de veces que AI está contenido en AO, ó lo que es lo mismo, cuántas veces AO cabe en AF; pero $AF=2AO+AI$; luego la razon $\frac{AF}{AO}$, es decir, $\frac{AO}{AI}$, es igual á $2+\frac{AI}{AO}$: de modo que teniendo que buscar cuántas veces AI está contenido en AO, la operacion nunca tendrá fin, y por lo tanto no hay comun medida entre el lado del cuadrado inscripto y el radio.

les (179) estos ángulos, porque OA = OB, cada uno valdrá $\frac{2}{3}$ de recto, y el triángulo AOB será equiángulo, y por consiguiente equilátero (180): por lo tanto, *el lado del exágono regular es igual al radio;* de modo que, para inscribir este polígono en la circunferencia, bastará llevar el radio seis veces sobre la misma, y unir cada punto de division con el siguiente.

335. Corolario. Uniendo de dos en dos los vértices del exágono regular, se formará el triángulo equilátero inscripto. Para calcular su lado se observará que, siendo el arco ABCD, los $\frac{3}{6}$ ó $\frac{1}{2}$ de la circunferencia, el triángulo ACD es rectángulo en C, y por lo mismo, siendo AD = 2R y CD = R, se tendrá:

$$AC=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{CD}^2}=\sqrt{4R^2-R^2}=\sqrt{3R^2};$$

ó finalmente $$AC=R\,.\sqrt{3}.$$

Donde vemos que *el lado del triángulo equilátero inscripto es igual al radio multiplicado por la raiz cuadrada de* 3; por lo que, la raiz cuadrada de *tres* es el lado del triángulo equilátero inscripto en un círculo cuyo radio es la unidad lineal.

336. Escolio I. A la simple inspeccion de la figura se ve que, estando cada uno de los puntos C y E equidistantes de O y de D, CE es perpendicular en el medio de OD, de suerte que OG = $\frac{1}{2}$ OD: por lo tanto, *la apotema* r *de un triángulo equilátero es la mitad del radio* R *del círculo que le está circunscripto; y su altura* h *los* $\frac{3}{2}$ *de este mismo radio.* Designando por a el lado del triángulo, tendrémos:

$$R=\frac{a}{\sqrt{3}},\ r=\frac{a}{2\sqrt{3}},\ h=\frac{3a}{2\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Levantando en D una tangente que termine en las prolongaciones de los radios OC y OE, se hallará el lado C′E′ del triángulo equilátero circunscripto al círculo OA; y la semejanza de los triángulos OCE y OC′E′ dará la proporcion:

$$\frac{C'E'}{CE}=\frac{OD}{OG}\,(292)=2:$$

luego *el lado del triángulo equilátero circunscripto á un círculo es doble que el del inscripto en el mismo círculo.*

337. Escolio II. Si en el punto O se levanta la OI perpendicular al diámetro AD, se verá que el arco IC es la tercera parte del cua-

drante ICD, y que así es fácil dividir un cuadrante en tres partes iguales; pero solo en este caso puede resolverse el problema de la triseccion de un arco, sin emplear otros instrumentos que la regla y el compás. (Véase mas adelante, núm. 348).

Problema VI.

338. *Inscribir un decágono regular en una circunferencia.*

Suponiendo conocido el lado del decágono regular, y que sea AB este lado (fig. 155), el ángulo central AOB opuesto al mismo valdrá la décima parte de cuatro rectos, ó lo que es lo mismo, los $\frac{4}{10}$ ó sean $\frac{2}{5}$ de un recto; por consiguiente, la suma ABO + BAO de los otros dos ángulos del triángulo AOB valdrá $\frac{8}{5}$ de recto, y siendo iguales los lados AO y OB, como radios de un mismo círculo, tambien lo son los ángulos opuestos ABO y BAO, por lo que vale cada uno $\frac{4}{5}$ de un recto ó sea doble que el ángulo AOB. Ahora bien, tirando la recta AC que divida en dos partes iguales el ángulo BAO, resultarán los dos triángulos BAC y CAO que serán isósceles, por tener el último el ángulo CAO=COA=$\frac{2}{5}$ de recto; y el primero porque el ángulo BCA = CAO + COA (172) = $\frac{4}{5}$ de recto, que es tambien el valor del ángulo ABC. En virtud de esto serán AB=AC=CO, y además equiángulos los triángulos ABC y ABO, entre cuyos lados podrémos por consiguiente establecer la proporcion

$$\frac{AO}{AC}=\frac{AB}{BC},$$

que poniendo en vez del radio AO el OB, y por el lado AB su igual CO, se convertirá en

$$\frac{BO}{CO}=\frac{CO}{BC},$$

la cual demuestra que el punto C divide al radio BO en media y estrema razon (305), y que el segmento mayor es CO, que segun ya sabemos es igual al lado AB. Por consiguiente podemos decir que *el lado del decágono regular es igual al segmento mayor, que resulta de dividir en media y estrema razon el radio del círculo circunscrito.*

Así pues, *para inscribir un decágono regular en un círculo, dividirémos el radio en media y estrema razon, y colocarémos el segmento mayor diez veces sobre la circunferencia.* Para ejecutar esta construccion trázense dos diámetros AF y GH perpendiculares entre sí (figura 156), y haciendo centro en G trácense con el radio GO de la circunferencia dada dos arcos que la corten en M y N, y uniendo estos puntos, tendrémos la perpendicular MN que dividirá en dos partes iguales en I al radio GO (61); hágase centro en I, trácese con el radio IO el arco OK y resultará el segmento AK, que será el mayor del radio AO dividido en media y estrema razon (305); por lo que llevándole desde A hasta B, se tendrá el lado AB del decágono regular inscrito en el círculo dado.

Para calcular el valor de este lado es preciso hallar el de AK, ó sea la diferencia entre AI é IK, ó lo que es lo mismo, entre AI é IO. Para conseguirlo observarémos que en el triángulo rectángulo AIO conocemos el cateto $AO=R$ y el $OI=\frac{R}{2}$, de modo que siendo

$$AI=\sqrt{\overline{AO}^2+\overline{OI}^2},$$

podrémos escribir

$$AI=\sqrt{R^2+\frac{R^2}{4}}=\sqrt{\frac{4R^2+R^2}{4}}=\sqrt{\frac{5R^2}{4}}=\frac{R.\sqrt{5}}{2};$$

y siendo además $IK=IO=\frac{R}{2}$, tendrémos

$$AK=AI-IK=AI-IO=\frac{R.\sqrt{5}}{2}-\frac{R}{2}=\frac{R.\sqrt{5}-R}{2},$$

y considerando que el numerador proviene de haber multiplicado R por la diferencia $\sqrt{5}-1$, podrá tambien escribirse

$$AK=\frac{R(\sqrt{5}-1)}{2};$$

pero AK es el lado del decágono, luego *para hallar el lado del decágono regular inscripto en una circunferencia hay que multiplicar el radio de esta por el esceso que $\sqrt{5}$ tenga sobre la unidad, y partir el producto por dos.*

339. Corolario I. Uniendo de dos en dos los vértices del decágono, se formará un pentágono regular.

Para calcular el lado de este polígono, sean AB y BC (fig. 157) dos lados consecutivos del decágono regular, por lo que AC será uno del pentágono: uno A con D, y formo así un triángulo ABD semejante á ABF (260, 1.°), que dará por la comparacion de sus lados homólogos la proporcion

$$\frac{AF}{AD}=\frac{AB}{BD},$$

que llamando $\frac{1}{2}x$ á la longitud de AF, a á la del lado AB del decágono, y $2R$ á la de BD, podrá escribirse

$$\frac{\frac{1}{2}x}{AD}=\frac{a}{2R},$$

de donde

$$x=\frac{a.AD}{R}.$$

El triángulo rectángulo ABD da

$$AD=\sqrt{4R^2-a^2},$$

y por consiguiente,

$$x=\frac{a.\sqrt{4R^2-a^2}}{R}=\frac{\sqrt{a^2(4R^2-a^2)}}{R}$$

Pero como a representa el lado del decágono regular, se tiene (338) que

$$a=\frac{R(\sqrt{5}-1)}{2},$$

y
$$a^2=\frac{R^2(5-2\sqrt{5}+1)}{4}=\frac{R^2(6-2\sqrt{5})}{4};$$

por consiguiente,

$$4R^2-a^2=4R^2-\frac{R^2(6-2\sqrt{5})}{4}=\frac{R^2(16-6+2\sqrt{5})}{4}=\frac{R^2(10+2\sqrt{5})}{4};$$

y sustituyendo estos valores de a^2 y de $(4R^2-a^2)$ en el de x, resultara

$$x=\frac{\sqrt{R^4(6-2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})}}{4R}=\frac{R\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}.$$

Añadiendo el cuadrado del radio al cuadrado del lado del decágono regular se hallará

$$\frac{R^2(6-2\sqrt{5})}{4}+R^2=\frac{R^2(10-2\sqrt{5})}{4}=x^2;$$

es decir, que *el cuadrado del lado del pentágono regular inscripto en un círculo, es igual á la suma de los cuadrados del radio de este círculo, y del lado del decágono regular inscripto.*

340. Corolario II. Llevando el radio sobre la circunferencia

desde A hasta D (fig. 155), el arco AD será $\frac{1}{6}$ de ella; y como el arco AB es $\frac{1}{10}$, su diferencia BD será $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{5-3}{30}=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$ de la circunferencia; luego la cuerda de este arco será el lado del pentedecágono regular inscripto; y será fácil construir este polígono.

* Para calcular el lado del pentedecágono regular en funcion del radio, tiro el diámetro AF, uno F con B y con D, y resultará así un cuadrilátero inscripto ABDF, que por el teorema de *Ptolomeo* (274) dará:

$$[1] \qquad AD.BF = AF.BD + AB.DF\,;$$

pero $AD=R$, $AF=2R$, DF que es el lado del triángulo equilátero inscripto vale $R\sqrt{3}$, y en fin, el triángulo rectángulo ABF da

$$BF=\sqrt{4R^2-\frac{R^2(6-2\sqrt{5})}{4}}=\frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,;$$

luego sustituyendo estos valores en la ecuacion [1], reduciendo y trasponiendo, resultará

$$BD=\frac{R\left\{\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}\,(\sqrt{5}-1)\right\}}{4}.$$

341. Escolio. Sabemos ya inscribir en una circunferencia los polígonos regulares de 4, 6, 3, 10, 5 y 15 lados; y como hemos visto que siempre es posible inscribir en una circunferencia un polígono regular que tenga doble número de lados que uno regular ya inscripto (325), y circunscribir en la misma otro tambien regular de igual número de lados que el regular inscripto que se habia dado (323), podemos inscribir y circunscribir á una circunferencia dada todo polígono regular cuyo número de lados sea algun término de cualquiera de las cuatro progresiones siguientes:

$$\begin{array}{l}
\div\ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : \ldots.\ 3.2^n,\\
\div\ 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : \ldots.\ 4.2^n,\\
\div\ 5 : 10 : 20 : 40 : 80 : 160 : \ldots.\ 5.2^n,\\
\div\ 15 : 30 : 60 : 120 : 240 : 480 : \ldots.\ 15.2^n,
\end{array}$$

y calcular su lado por medio de las fórmulas n.os **323** y **325**; pero estos son los únicos polígonos regulares que la geometría elemental enseña á inscribir y circunscribir á la circunferencia [1].

[1] Observarémos, sin embargo, que tambien se puede, *sin emplear mas que la regla y el compás*, como lo ha demostrado Mr. *Gauss* (*Disquisitiones Arithmeticæ, Lipsiæ*,

342. No podemos, por consiguiente, dividir la circunferencia mas que en un número de partes designado por alguno de los términos de las cuatro anteriores progresiones; porque la inscripcion de un polígono regular en una circunferencia se reduce á la division de esta en tantas partes iguales, como lados haya de tener aquel, y recíprocamente. En cualquier otro caso, hay que recurrir al tanteo ó á métodos empíricos: así se ha encontrado que el lado de un polígono regular de

7 lados es $\frac{1}{2}$ del lado del triángulo equil., con un error $<\frac{2}{1000}$ del radio
9.......... $\frac{2}{5}$ .... $<\frac{1}{100}$
11.......... $\frac{2}{5}$ del lado del cuadrado........................ $<\frac{3}{1000}$
13.......... $\frac{1}{3}$ .... $<\frac{1}{100}$
17.......... $\frac{3}{8}$ del radio.. $<\frac{1}{100}$
19.......... $\frac{1}{3}$ .... $<\frac{1}{200}$
21.......... $\frac{1}{6}$ del lado del triángulo equilátero........... $<\frac{1}{100}$
23.......... $\frac{1}{5}$ del lado del cuadrado........................ $<\frac{1}{100}$
25.......... $\frac{1}{4}$ del radio.. $<\frac{1}{1000}$
27.......... $\frac{1}{6}$ del lado del cuadrado........................ $<\frac{1}{200}$
29.......... $\frac{1}{8}$ del lado del triángulo equilátero........... $<\frac{1}{200}$

Quizás sea mas exacto aun calcular el lado de un polígono que se quiera inscribir por la tabla de las cuerdas. Si el polígono hubiese de tener, por ejemplo, *once* lados, se veria que el arco subtendido por cada lado valdria $\frac{360°}{11} = 32°43'$, cuya cuerda es 56,33, en la hipótesis de que el radio sea igual á 100 unidades. Si el radio del círculo dado tiene 4^m, no habrá mas que llevar once veces sobre la circunferencia una abertura de compás de $4^m \times 0{,}5633 = 2^m{,}2532$.

* 343. De la division de la circunferencia en 25 partes iguales, se deduce fácilmente un medio de dividirla en 400, porque no hay mas que dividir cada una de las 25 partes en 16, lo que es fácil (**149**). Mas para dividirla en 360, habria que saber el modo de dividir un arco en tres partes iguales, lo que no se puede por geometría elemental cuando el número de partes de este arco no es una potencia exacta de 2. Indicarémos, sin embargo, la solucion aproximada

---

1801), inscribir en la circunferencia cualquier polígono regular cuyo número de lados esté comprendido en la fórmula $(2^n + 1)$, con tal que este número de lados sea primo. Mas las operaciones se van haciendo tan complicadas, aun para el mas sencillo de estos polígonos que es el de 17 lados (los de 3 y de 5 pertenecen ya á las cuatro anteriores progresiones), que vale mas recurrir al tanteo.

que Mr. *Sarrus* ha dado de la triseccion del arco en los *Anales de Matemáticas*.

Suponiendo que AB (fig. 160) sea el arco que se trata de dividir en tres partes iguales, se prolongará AO hasta un punto D, distante de O el doble del radio AO; en O se levantará la OS indefinida y perpendicular á DA, se unirá B con D, y el punto C en que BD corte á OS determinará una longitud OC, algo mayor, pero que se diferenciará poco de la cuerda correspondiente á los $\frac{2}{3}$ del arco AB. Para hallar esta cuerda con mayor aproximacion, se hará centro en C y describirá un arco con el radio OD, se unirá con B el punto D′ en que este arco corte á DA, y el C′, interseccion de BD′ con OS, dará un valor OC′, que se diferenciará todavía menos que el OC del arco perteneciente á los $\frac{2}{3}$ del AB. Haciendo centro en C′ y trazando con el radio OD′ un arco, y uniendo la interseccion D″ de este y AD con B, resultará en la de BD″ con OS un nuevo punto C″, que determinará una recta OC″ todavía mas aproximada que OC′ á la cuerda de los $\frac{2}{3}$ de AB. Haciendo centro en C″ y repitiendo igual construccion podria hallarse una aproximacion mayor aun, pero basta generalmente con la que da OC″.

Si el arco dado AB (fig. 160 *bis)* fuera mayor que un cuadrante, se completaria la semicircunferencia; se dividiria el arco BA′ en tres partes iguales; y llevando el radio desde F á G sobre la circunferencia, el arco BG seria $\frac{1}{3}$ de AB. En efecto, FG es la sesta parte de la circunferencia (334), ó la tercera del arco ABA′. Pero $BF=\frac{BA'}{3}$; luego

$$FG-BF \text{ ó sea } BG=\frac{ABA'}{3}-\frac{BA'}{3}=\frac{AB}{3}.$$

En fin, si el arco dado fuese un cuadrante, ya hemos visto (337) que bastaria llevar el radio sobre este arco á partir desde uno de sus estremos, y que la parte restante seria el $\frac{1}{3}$ del arco dado.

Si ahora se quisiese dividir la circunferencia en 360 partes iguales, se empezará por hacerlo en 15 (340); luego cada quinceava parte en 8 (149), lo que dará 120 en toda la circunferencia, y no faltará mas que dividir cada una de estas últimas partes en 3.

CAPÍTULO II.

RELACION DE LA CIRCUNFERENCIA AL DIÁMETRO.

344. Inscribiendo en una circunferencia un polígono regular cualquiera, y luego una série de polígonos regulares tales que cada uno tenga doble número de lados que el precedente, se llegará bien pronto á uno cuyos lados serán tan pequeños que se confundirán sensiblemente con los arcos á que subtienden; y si en lugar de detenernos en este último polígono, continuamos doblando mentalmente el número de lados, se concibe que cuando llegue á ser infinito, el polígono se habrá confundido con el círculo: de modo que *se puede considerar que el círculo es un polígono regular de un número infinito de lados infinitamente pequeños* (1). Estos lados se llaman *los elementos* de la circunferencia; y segun la definicion del núm. **84**, se ve que *la tangente á la circunferencia en un punto dado no es mas que la prolongacion indefinida del elemento en que esté situado el punto*.

345. El ángulo esterior formado por dos elementos consecutivos, *ángulo* que se llama *de contingencia*, es infinitamente pequeño; porque hemos visto (**316** (1)) que el ángulo de un polígono regular difiere infinitamente poco de dos rectos, cuando el número de lados del polígono es infinitamente grande.

346. Lo que acabamos de decir de la circunferencia, se aplicaria evidentemente á una curva cualquiera, de suerte que *se puede mirar á toda curva como una línea quebrada compuesta de infinito número de lados infinitamente pequeños*, los cuales tambien se llaman los *elementos* de la curva, y por lo tanto, *la tangente en un punto de una curva es la prolongacion indefinida del elemento sobre el cual esté colocado el punto.*

347. De esta nueva manera de considerar al círculo se deduce que debe gozar de todas las propiedades de los polígonos regulares que sean independientes del número de lados. Por lo tanto, del demostrado en el núm. **322**, se deduce el siguiente

(1) Se llegaria á la misma consecuencia partiendo de un polígono regular *circunscrito*, y suponiendo que el número de sus lados aumenta indefinidamente.

TEOREMA.

348. *Dos circunferencias son proporcionales á sus radios:* es decir que designando por circ.ª R y por circ.ª R′ á las de los círculos cuyos respectivos radios sean R y R′, se tendrá

$$\frac{\text{circ.}^a R}{\text{circ.}^a R'}=\frac{R}{R'}\ (^1).$$

349. COROLARIO I. *Dos* ARCOS SEMEJANTES, es decir, que correspondan á ángulos en el centro iguales, *son proporcionales á sus radios.*

Sean, en efecto, O y O′ dos ángulos en el centro iguales, y A y A′ los arcos que sus lados intercepten sobre las circunferencias que tengan respectivamente por radios R y R′: resulta del teorema núm. 109 que la razon de cada uno de estos ángulos á 4 rectos es igual á la que hay entre el arco comprendido entre sus lados y la circunferencia de que forma parte; es decir, que se tendrá

$$\frac{O}{4 \text{ rectos}}=\frac{A}{\text{circ.}^a R},\ \text{y}\ \frac{O'}{4 \text{ rectos}}=\frac{A'}{\text{circ.}^a R'};$$

y como $O=O'$, estas dos proporciones tienen comun la primera razon; luego

$$\frac{A}{\text{circ.}^a R}=\frac{A'}{\text{circ.}^a R'},$$

de donde

$$\frac{A}{A'}=\frac{\text{circ.}^a R}{\text{circ.}^a R'}=\frac{R}{R'}\ (348).$$

350. COROLARIO II. *Las circunferencias de dos círculos son proporcionales á sus diámetros;* es decir que

$$\frac{\text{circ.}^a R}{\text{circ.}^a R'}=\frac{2R}{2R'},\ \text{de donde se deduce que}\ \frac{\text{circ.}^a R}{2R}=\frac{\text{circ.}^a R'}{2R'}.$$

(¹) Si se creyese necesario desarrollar la demostracion de este importante teorema, se inscribirian en las dos circunferencias dadas dos polígonos regulares semejantes, y llamando P y P′ á sus perímetros, se tendria (322):

$$\frac{P}{P'}=\frac{R}{R'}.$$

Pero si sustituimos á estos dos polígonos otros regulares semejantes, cuyo número de lados sea cada vez mayor, la razon variable $\frac{P}{P'}$ no deja de ser igual á la $\frac{R}{R'}$; luego tambien lo será en su límite $\frac{\text{circ.}^a R}{\text{circ.}^a R'}$; por lo cual $\frac{\text{circ.}^a R}{\text{circ.}^a R'}=\frac{R}{R'}$.

En virtud de esto, *la razon entre una circunferencia cualquiera y su diámetro*, es la misma que la de cualquiera otra circunferencia al suyo, y *es*, por consiguiente, *un número constante.* Pero la razon de dos cantidades es el cociente que se obtiene al dividir la primera por la segunda; luego

Si se multiplica LA RAZON DE LA CIRCUNFERENCIA AL DIÁMETRO *por el diámetro de una circunferencia, se tendrá la longitud de esta circunferencia;*

Y *si se divide la longitud de una circunferencia por la razon de la circunferencia al diámetro, se tendrá la de su diámetro.*

Convendrémos para lo sucesivo en representar por la letra griega π la razon de la circunferencia al diámetro; y así, designando por R la longitud del radio de una circunferencia, espresarémos las dos reglas precedentes por las fórmulas

$$\text{circ.}^{a}\,R = 2\pi R, \quad y \quad 2R = \frac{\text{circ.}^{a}\,R}{\pi}.$$

Ocupémonos ya de la determinacion de este número π.

PROBLEMA.

351. *Hallar la razon de la circunferencia al diámetro* (1).

Siendo esta la misma en todas las circunferencias posibles, considerarémos aquella cuyo radio es la unidad lineal, y su diámetro por lo mismo igual á 2. Si podemos calcular la longitud de esta circunferencia, quedará resuelto el problema tomando la mitad de aquella longitud: así, pues, queda reducida la cuestion *á calcular la longitud de la circunferencia cuyo radio sea la unidad lineal.*

Si se calculan sucesivamente los perímetros de los polígonos regulares de 4, 8, 16, 32..... lados, inscriptos en la circunferencia que tenga por radio 1, es evidente que estos perímetros se diferenciarán cada vez menos de la circunferencia, y tomando por longitud de esta la de uno de aquellos, el error que se cometa será tanto menor, cuanto mayor sea el número de los lados del polígono en que nos detengamos.

(1) Esta relacion de la circunferencia al diámetro se calcula con mucha facilidad fundándose en proposiciones que están fuera del dominio de la geometría elemental; el procedimiento que se esplica en este capítulo debe pues mirarse mas como un ejercicio que como verdadero medio de hallar dicha relacion. *(Nota del T.)*

Sean, pues, c_4, c_8, c_{16}, c_{32}.... los lados de los polígonos regulares de 4, 8, 16, 32.... lados, inscriptos en la circunferencia del radio 1; y tendrémos en primer lugar para el lado del cuadrado inscripto (331)

$$c_4=\sqrt{2};$$

y aplicando la fórmula [1] del núm. 325, que en el caso de R=1 se reduce á $y=\sqrt{2-\sqrt{4-a^2}}$, haciendo $a=c_4=\sqrt{2}$, se hallará para el lado del octógono regular inscripto

$$c_8=\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Por medio de la misma fórmula se obtendrán, haciendo en ella $a=c_8=c_{16}=c_{32}$.... los valores de c_{16}, c_{32}, etc.

$$c_{16}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$

$$c_{32}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}, \text{ etc.}$$

Multiplicando respectivamente estos valores por 4, 8, 16, 32, etc., tendrémos los valores de los perímetros de los polígonos inscriptos de 4, 8, 16, 32.... lados; y haciendo los cálculos, se hallará:

$$\begin{aligned}
p_4 &= 4c_4 = 5{,}65685,\\
p_8 &= 8c_8 = 6{,}12293,\\
p_{16} &= 16c_{16} = 6{,}24289,\\
p_{32} &= 32c_{32} = 6{,}27310,\\
p_{64} &= 64c_{64} = 6{,}28066,\\
p_{128} &= 128c_{128} = 6{,}28255,\\
p_{256} &= 256c_{256} = 6{,}28301,\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Los valores que se obtengan dividiendo por 2 los números que preceden, serán cada vez mas aproximadamente los de π.

Para saber el grado de aproximacion á que se llega deteniéndose en el perímetro de un polígono inscripto, por ejemplo, en el de 256 lados, se calculará el del polígono del mismo número de lados circunscripto á la circunferencia que tiene por radio 1; y como es claro que la longitud de la circunferencia está comprendida entre las de los perímetros de dos polígonos regulares semejantes, uno inscripto y otro circunscripto [1], y que además estos dos perímetros se diferenciarán en tanto menos, cuanto mas considerable sea el número de sus lados [2]; la longitud de la circunferencia estará tambien comprendida entre uno de estos dos perímetros y su *media diferencial.* Así, cuando se hubiese llegado á dos polígonos semejantes cuyos perímetros se diferenciasen en menos de cuatro unidades, por ejem-

---

[1] Esto resulta de la proposicion siguiente, de la que el teorema del núm. 21 no es mas que un caso particular.

Toda línea que envuelve desde un estremo á otro á una CONVEXA *cualquiera* AMB, *es mayor que esta.*

En efecto, si la línea AMB (fig. 158) no es menor que todas las que la envuelven, existirá entre estas una cierta línea ACDB mas corta que todas las demás. Tiremos entre las dos líneas AMB y ACDB una recta cualquiera FG que no encuentre á la AMB, ó que por lo menos no haga mas que tocarla, lo que es posible, por ser AMB convexa. Ahora, la recta FG es menor que FCDG (7); luego, añadiendo, tanto á una como á otra, AF y GB, se tendrá: $AFGB < ACDB$; luego era absurdo suponer que ACDB fuese la mas corta de todas las líneas que envuelven á AMB; y como se podria repetir el mismo razonamiento sobre todas las que rodean á AMB, debe deducirse que efectivamente es AMB menor que todas las que la envuelven.

Este razonamiento conviene tambien al caso en que la línea convexa AMB fuera cerrada, ó que la línea envolvente tuviese uno ó varios puntos comunes con ella, ó que no tuviese ninguno.

[2] *Se puede siempre inscribir y circunscribir á una circunferencia dos polígonos regulares semejantes, tales que la diferencia de sus perímetros sea menor que cualquiera cantidad dada por pequeña que sea.*

Llamando R al radio de la circunferencia dada, P y p á los perímetros de dos polígonos regulares semejantes, el primero circunscripto y el segundo inscripto en esta circunferencia, y r á la apotema de este último, se tendrá (232)

$$\frac{P}{p}=\frac{R}{r}, \text{ de donde resulta } \frac{P-p}{P}=\frac{R-r}{R},$$

y por consiguiente

$$P-p=\frac{P(R-r)}{R}.$$

Pero inscribiendo y circunscribiendo en la circunferencia polígonos regulares semejantes cuyo número de lados vaya siendo cada vez doble, los valores sucesivos de P, cantidad mayor que la circunferencia (251 [1]), irán constantemente disminuyendo; luego, si se puede probar que el factor $(R-r)$ puede llegar á ser menor que toda magnitud dada, quedará probado que tambien lo llegará á ser la diferencia $P-p$, una vez que el denominador R es constante. Pero $(R-r)$, ó $(OA-OK)$ (fig. 149), es una cantidad menor que AK, es decir, que la mitad del lado del polígono inscripto que se considera, cuyo lado puede hacerse tan pequeño como se quiera; luego la diferencia $P-p$ decrece indefinidamente.

Es además evidente que el lado del polígono inscripto puede llegar á ser tan pequeño como se quiera. En efecto, los arcos subtendidos por los lados de los polígonos inscriptos sucesivos son los términos de una progresion geométrica, cuya razon es $\frac{1}{2}$, y que se prolonga indefinidamente. Pero se sabe (*Arit.*, 338) que el último término de una progresion de esta clase tiene *cero* por límite; luego con mayor razon las cuerdas de estos arcos tenderán hácia cero plo, de un cierto órden decimal, la circunferencia se diferenciaría de la media diferencial entre aquellos en menos de dos unidades del mismo órden, y por consiguiente, tomando la mitad de esta media, habria seguridad de tener el valor de π con un error menor que una unidad del último órden decimal. Llamando P_{256} al perímetro del polígono circunscripto de 256 lados, y C_{256} á su lado, se tendrá

$$\frac{P_{256}}{p_{256}}=\frac{C_{256}}{c_{256}}, \text{ de donde } P_{256}=p_{256}\frac{C_{256}}{c_{256}}.$$

Pero la fórmula [1] del núm. **323** da una relacion entre los lados a y x de los polígonos regulares inscripto y circunscripto del mismo número de lados, y haciendo en ella $a=c_{256}$, $x=C_{256}$, $R=1$, deducirémos

$$\frac{C_{256}}{c_{256}}=\frac{2}{\sqrt{4-c^2_{256}}},$$

y por consiguiente,

$$P_{256}=p_{256}\times\frac{2}{\sqrt{4-c^2_{256}}}=6,28348.$$

Difiere este valor del que hemos hallado para p_{256}, en 0,00047; luego, tomando por valor de la circunferencia la media diferencial $\frac{1}{2}(P_{256}+p_{256})=6,283245$, el error cometido será menor que $\frac{1}{2}.0,00047=0,000235$; de modo que dividiendo 6,283245 por 2, se tendrá para π el valor 3,1416225, exacto en menos de $\frac{1}{2}.0,000235=0,0001175$; por lo que son exactas las tres primeras decimales.

352. En vez de tomar el cuadrado inscripto por punto de partida, se hubiera podido empezar por el exágono inscripto, cuyo lado es igual al radio (**334**), y calcular sucesivamente los perímetros de los polígonos inscriptos de 6, 12, 24, 48.... lados.

353. Si se quiere conocer la aproximacion que da el perímetro de cada uno de los polígonos que vayamos inscribiendo, será mas sencillo hacer uso de las fórmulas [1] y [2] (**329**), que permiten, conociendo los perímetros de dos polígonos regulares semejantes, uno inscripto y otro circunscripto, calcular los perímetros de otros dos inscripto y circunscripto de doble número de lados. La comparacion de los valores que vayamos sucesivamente hallando para los perímetros de cada polígono inscripto y el del circunscripto correspondiente, permitirá juzgar el momento en que convenga detenernos para tener una aproximacion dada. Si, por ejemplo, se quisiera obtener el valor de π aproximado á menos de *una milésima*, habria que seguir el cálculo hasta llegar á dos polígonos semejantes, tales que la diferencia de sus perímetros no pasase de *cuatro milésimas*, lo cual es posible (351 (2)); y no habria ya mas que sumar estos dos perímetros y tomar la cuarta parte de su suma. Supongamos que se haya empezado por el exágono inscripto, por ejemplo, y tendrémos para valor de su lado y de su perímetro (334)

$$c_6=1, \ p_6=6.$$

Haciendo en la fórmula [1] del núm. 323 $R=a=1$ y $x=C_6$, resultará para el lado del exágono circunscripto

$$C_6=\frac{2}{\sqrt{3}}, \text{ y } P_6=\frac{12}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{12^2}{3}}=\sqrt{48}=6,9282.$$

Para tener los perímetros de los dodecágonos inscripto y circunscripto, se sustituirá á p y P en las fórmulas [1] y [2] del núm. 329, los valores hallados arriba para p_6 y P_6, y se deducirá:

$$P_{12}=\frac{2P_6p_6}{P_6+p_6}=24(2-\sqrt{3})=6,4307,$$

$$p_{12}=\sqrt{P_{12}p_6}=12\sqrt{2-\sqrt{3}}=6,2115.$$

Se calculará del mismo modo P_{24} y p_{24} por medio de P_{12} y p_{12}, y así sucesivamente; y de este modo llegarémos á encontrar que los perímetros de los polígonos de 96 lados son:

$$\begin{array}{ll} & P_{96}= \ 6,282 \\ & p_{96}= \ 6,285 \\ \hline \text{Suma} & \ =12,567, \text{ de donde } \pi=3,141; \end{array}$$

que es el valor de la relacion de la circunferencia al diámetro, con un error menor que una milésima.

Si se quisiese que la cifra de las milésimas fuese tambien exacta, habria que seguir el cálculo hasta que se llegase á dos polígonos cuyos perímetros tuviesen comunes las tres primeras decimales, y despreciar las cifras siguientes (1).

---

(1) En los libros indios titulados *Opavedas* han hallado los ingleses otro valor de π, que es probablemente el mas antiguo, y está representado por $\pi=\frac{3927}{1250}$.

Los principales matemáticos se han ocupado en calcular el valor de π con una aproxi-

354. Legendre ha demostrado que, *no solamente la razon de la circunferencia al diámetro es incomensurable, sino que tambien lo es su cuadrado;* de suerte que solo puede obtenerse con una aproximacion mas ó menos grande. Por un método mas espedito que el precedente, se ha llegado á calcular el valor de π hasta con 154 decimales, y es fácil conocer que, empleando este valor para calcular la circunferencia de un círculo cuyo radio fuese la distancia media de la tierra al sol, es decir, que tuviese mas de 152 millones de kilómetros, el error seria mucho menor que el grueso de un cabello.

El valor de π, exacto hasta media unidad del décimo órden decimal, es

$$\pi = 3{,}14159\ 26536,$$

y tiene por logaritmo

$$L.\pi = 0{,}49714\ 98727.$$

Tambien se han hallado los siguientes valores aproximados de la relacion de la circunferencia al diámetro:

$$\pi = \tfrac{22}{7}, \text{ y } \pi = \tfrac{355}{113},$$

de los que se debe el primero á *Arquímedes*, y es exacto en menos de dos milésimas, y el segundo á *Adriano Metio*, cuyo nombre conserva, no llegando su error á media millonésima, por lo que se le usa con frecuencia. Este último es fácil de recordar, observando

---

macion muy grande, y en la obra de Ludolffo *Van-Ceulen* lo está con 35 cifras decimales, de las que son exactas las 34 y la siguiente aproximada hasta una unidad de su órden. En el año 1719 le presentó *Lagni* en las memorias de la Academia de ciencias de Paris con 128, de las que son exactas las 127; aunque nuestro compatriota D. *José Mariano Vallejo* opina, que la cifra 7 que aquel escribe en el lugar 113 debe ser un 8; y fúndase Vallejo en el valor que el español *Vega* inserta en su *Thesaurus logaritmicus*, publicado en Berlin, cuyo valor está espresado con 140 cifras decimales, y conforme con el que se lee en un manuscrito existente en la biblioteca de Ratclif, en Oxford, que tiene 155 cifras decimales, y que es el siguiente:

$$\pi = 3{,}141592653589\ 793238\ 462643\ 383279\ 502884\ 197169\ 399375\ 105820$$
$$974944\ 592307\ 816406\ 286208\ 998628\ 034825\ 342117\ 067982\ 148086\ 513282\ 306647\ 093844$$
$$609550\ 582371\ 725359\ 408128\ 4802$$

El primero que demostró que la relacion de la circunferencia al diámetro es un número incomensurable fué *Lambert*, en las memorias de la Academia de Berlin, correspondientes al año 1761.

Repetimos aquí, para inteligencia de los principiantes, que todos estos valores se han calculado por medio de las séries, y no por el método que hemos esplicado en el presente capítulo, pues tan fácil como es hallarlos por las primeras, es pesado por este último. *(Nota del T.)*.

que no hay mas que escribir un número en que esten repetidos dos veces cada uno de los impares 1, 3, 5; esto es, escribir 113355, y poniendo las tres últimas cifras por numerador y las tres primeras por denominador, y el quebrado así escrito espresa la relacion de Metio.

355. La geometría elemental no proporciona medio de *rectificar la circunferencia;* es decir, de hallar una recta que sea *exactamente* igual en longitud á una circunferencia dada. Así es que, para resolver este problema que se presenta con frecuencia en las artes, hay que recurrir á métodos de aproximacion. Si se quiere hacer uso de la relacion de Arquímedes, se tirará por una de las estremidades de un diámetro una recta cualquiera, sobre la cual se aplicará 22 veces una misma abertura de compás; se unirá el 7.° punto de division con el otro estremo del diámetro, y tirando por la 22.ª una paralela á la recta que une aquellos dos puntos, quedará determinada sobre la direccion del diámetro una longitud que será sensiblemente igual á la circunferencia propuesta.

356. Tambien pudiera emplearse el siguiente método, muy sencillo y susceptible al mismo tiempo de una gran exactitud.

Inscríbase en la circunferencia que haya que rectificar una cuerda AB igual al radio (fig. 165): tírese el diámetro IC perpendicular á esta cuerda, y en el punto C una tangente terminada en F por la prolongacion del radio OA; llévese, finalmente, tres veces el radio sobre esta tangente á partir desde F, y únase G con I, y esta recta GI será muy próximamente la mitad de la circunferencia. En efecto, la semejanza de los triángulos OCF y OKA da que

$$FC=\frac{AK\times OC}{OK}=\frac{\frac{1}{2}R\times R}{\frac{1}{2}R.\sqrt{3}}=\frac{R.\sqrt{3}}{3},$$

de donde resulta que

$$CG=FG-FC=3R-\frac{R\sqrt{3}}{3}=\frac{R(9-\sqrt{3})}{3}.$$

El triángulo rectángulo CIG dará

$$GI=\sqrt{\overline{CG}^2+\overline{IC}^2}=\frac{R\sqrt{120-18\sqrt{3}}}{3}=R.3{,}1415333.$$

Pero la semicircunferencia es igual á $\pi R=R.3{,}1415926$; luego el error es igual á $R.0{,}000059$; es decir, menor que $\frac{6}{100000}$ del radio.

LIBRO QUINTO.

AREAS DE LAS SUPERFICIES PLANAS Y SU COMPARACION.

CAPÍTULO PRIMERO.

ÁREAS DE LAS SUPERFICIES PLANAS.

357. *La* MEDIDA *de una superficie es la razon entre esta y otra que se toma por* UNIDAD. Esta medida es lo que se llama ÁREA *de la superficie.* En el discurso de esta obra *tomarémos por unidad superficial el cuadrado cuyo lado sea la unidad lineal;* de modo que *área de una superficie es la razon que haya entre esta superficie y el cuadrado que tenga por lado la unidad lineal.*

TEOREMA I.

358. *Las áreas de dos rectángulos de la misma base son proporcionales á sus alturas.*

Sean ABCD y FGIK dos rectángulos, que designarémos para mayor sencillez por AC y FI, y cuyas bases AB y FG son iguales.

1.° *Supongamos, en primer lugar, que las alturas* AD *y* FK (figura 161) *son comensurables*, y que su comun medida esté contenida 8 veces en AD y 3 en FK: la razon de estas dos rectas será la de $\frac{8}{3}$. Si por los puntos de division de AD y de FK se tiran paralelas á AB y FG, quedarán divididos los rectángulos AC y FI respectivamente en 8 y en 3 partes iguales, y como las del primero son iguales á las del segundo, porque son rectángulos superponibles (204), se ve que la razon de AC á FI es tambien la de $\frac{8}{3}$; luego

$$\frac{AC}{FI}=\frac{AD}{FK}.$$

2.° *Supongamos actualmente que las alturas* AD y FK (fig. 162) *sean incomensurables.* Dividamos FK en un número cualquiera de partes iguales, y llevemos una de estas partes sobre AD tantas veces como se pueda. Sea DO el resto que encontremos: tiremos OP paralela á AB, y como las rectas AO y FK son comensurables, tendrémos

$$\frac{AP}{FI}=\frac{AO}{FK}.$$

Pero el rectángulo AP y su altura AO son cantidades variables, que tienden respectivamente hácia el rectángulo AC y su altura AD, á medida que el número de partes en que se divida á FK sea mayor, porque el punto O se irá así acercando al D tanto como se quiera. Luego las razones variables $\frac{AP}{FI}$ y $\frac{AO}{FK}$ tienen por límites respectivos $\frac{AC}{FI}$ y $\frac{AD}{FK}$. Pero estas razones variables son constantemente iguales; luego lo serán sus límites, y por lo tanto

$$\frac{AC}{FI}=\frac{AD}{FK},$$

como se queria demostrar.

359. Escolio. Tambien puede decirse que *dos rectángulos de la misma altura son proporcionales á sus bases*; porque los nombres de base y altura se aplican indiferentemente á cada uno de los lados contiguos de un rectángulo.

Teorema II.

360. *Las áreas de dos rectángulos cualesquiera son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas*; es decir, á los productos de los números abstractos que espresen las longitudes respectivas de estas líneas.

Sean R y R′ las áreas de los dos rectángulos propuestos; b y h la base y altura del primero, y b' y h' las del segundo. Construyamos un tercer rectángulo R″ que tenga la misma base b del primero, y la misma altura h' que el segundo; y comparándole sucesivamente con los rectángulos R y R′, tendrémos, segun el teorema precedente y su escolio, las proporciones

$$[1] \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{R}{R''}=\frac{h}{h'},\\ &\frac{R''}{R'}=\frac{b}{b'}; \end{aligned}\right.$$

que, multiplicadas ordenadamente, y suprimido el factor comun R″

que resulta en los dos términos de la primera razon de la proporcion producto, darán

$$\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'}=\frac{b\,.\,h}{b'\,.\,h'};$$

lo que demuestra el teorema [1].

Teorema III.

361. *El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura;* esto es, que la razon entre este rectángulo y el cuadrado que tenga por lado la unidad lineal, es igual á la que haya entre el producto de los dos *números abstractos* que espresen las razones respectivas de su base y de su altura, y esta unidad lineal.

Designemos, en efecto, por R el rectángulo que hay que medir; por b la longitud de su base, y por h la de su altura; por Q el cuadrado que se tome por unidad de superficie : la base y la altura de este cuadrado serán cada una igual á la unidad lineal; luego, en virtud del teorema anterior, la razon entre el rectángulo R y el cuadrado Q será igual á la razon entre el producto $b.h$ y $1\,.\,1$, es decir, á $b.h$; de modo que

$$\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{Q}}=b.h.$$

Mas la razon $\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{Q}}$ es lo que llamamos area del rectángulo R (357); luego esta área es igual al producto de los dos números abstractos que espresan las razones entre la base y la altura del rectángulo y la unidad lineal; luego *el área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura.*

362. Puede evidenciarse esta proposicion del modo que sigue, cuando las dimensiones de los rectángulos que se considere sean comensurables con la unidad lineal. Supongamos, en efecto, que la base del rectángulo ABCD (fig. 163) sea igual á $3^{\mathrm{m}}\frac{6}{10}$, y la altura á $2^{\mathrm{m}}\frac{45}{100}$. Tomo sobre AB 3 partes iguales á un metro, y sobre AD

(1) Observemos que en las proporciones [1] se podria muy bien mirar á las letras R, R′, R″ como representando rectángulos, y b, b', h, h' como representando líneas, porque los dos términos de cada razon serian tambien en este caso cantidades homogéneas; pero hemos considerado que representa cada una de estas letras la razon entre cada cantidad y la unidad de su especie, para poder multiplicar estas proporciones por órden; pues seria absurdo pretender que se multiplicase un rectángulo por otro.

2 partes tambien iguales á un metro, de modo que $EB=\frac{6^m}{10}$, y $Dd=\frac{45^m}{100}$; hecho esto por los puntos de division de la base y de la altura de nuestro rectángulo, tiro paralelas á sus lados. El rectángulo A*e* valdrá 3 metros cuadrados, y el rectángulo E*b* será los $\frac{6}{10}$ de un metro cuadrado (358); y por lo tanto, el rectángulo A*b* contendrá $3^{m.c}\frac{6}{10}$; y el A*c* valdrá $3^{m.c}\frac{6}{10}\times 2$. Pero el *d*C es los $\frac{45}{100}$ del A*b* (358), y vale por lo mismo $3^{m.c}\frac{6}{10}\times\frac{45}{100}$; luego el rectángulo total valdrá

$$3^{m.c}\frac{6}{10}\times 2+3^{m.c}\frac{6}{10}\times\frac{45}{100}=\left(3\tfrac{6}{10}\times 2\tfrac{45}{100}\right)\text{ metros cuadrados,}$$

es decir, el producto de su base por su altura.

TEOREMA IV.

363. *El área de un cuadrado es igual á la segunda potencia de su lado.*

Efectivamente, siendo el cuadrado un rectángulo que tiene iguales sus dos dimensiones, su área será igual á la segunda potencia de una de ellas [1].

364. COROLARIO I. Si se observa que los cuadrados de los números 1, 2, 3, 4, 5..... son respectivamente 1, 4, 9, 16, 25...., se verá que el cuadrado construido sobre una línea doble, triple, cuádrupla, quíntupla...., etc. de otra, será 4, 9, 16, 25.... etc. veces mayor que el construido sobre la última.

Recíprocamente, para construir un cuadrado que sea 4, 9, 16, 25..... veces mas pequeño que otro, habrá que construirle sobre una recta 2, 3, 4, 5..... veces menor que el lado del otro cuadrado.

365 [2]. COROLARIO II. Admitido ya en España el metro por *unidad* lineal, la *de superficie es el* METRO CUADRADO, *que se subdivide en cien decímetros cuadrados* (357 y 363). *El decímetro cuadrado vale cien centímetros cuadrados; y el centímetro cuadrado cien milímetros cuadrados.*

---

[1] Así, cuando se forma la segunda potencia de un número, se ejecuta la operacion necesaria para valuar el área del cuadrado cuyo lado contuviese precisamente este número de unidades lineales. Por esto se llama *cuadrado* de un número á su segunda potencia.

Por una razon semejante se usa la espresion *rectángulo de dos números* para designar su producto.

[2] Todo este artículo ha sido arreglado á las medidas españolas, variándole del original francés, que se referia á las de aquella nacion. (*Nota del T.*)

De esto se deduce que, *para convertir un número cualquiera de metros cuadrados en* DECÍMETROS, *ó en* CENTÍMETROS, *ó en* MILÍMETROS CUADRADOS, *basta correr la coma* DOS, CUATRO *ó* SEIS *lugares hácia la derecha.*

EJEMPLO. ¿Cuál es, en metros, decímetros y centímetros cuadrados, el área de un rectángulo cuya base tiene $2^{m},36$ y la altura $1^{m},234$?

Multiplico entre sí los dos números *abstractos* 2,36 y 1,234, y obtengo el producto 2,91224, y así el área pedida será $=2^{m.c},91224$, es decir, *dos metros cuadrados, noventa y un mil doscientas veinte y cuatro cienmilésimas de metro cuadrado:* ó sean 2 *metros cuadrados,* 91 *decímetros*, 22 *centímetros y* 40 *milímetros cuadrados.*

Hasta que esté planteado definitivamente el sistema métrico decimal, se tomará algunas veces por unidad lineal la *vara*, cuya razon con el metro es próximamente 0,835906; y ya sabemos que se subdivide en 3 piés, cada uno de estos en 12 pulgadas, y que una de estas tiene 12 líneas. En este caso, *la unidad de superficie será la* VARA CUADRADA, *que equivale á* 9 PIÉS CUADRADOS (363). *El pié cuadrado, que para superficies pequeñas tambien se toma á veces por unidad, se compone de* 144 PULGADAS CUADRADAS, *y cada una de estas de* 144 LÍNEAS CUADRADAS.

Cuando las dimensiones de un rectángulo estén apreciadas en varas y fracciones de vara, lo mas conveniente es reducirlo todo á unidades de la especie inferior. Por ejemplo, si la base es de $9^{v}\ 2^{p}\ 7^{pulg}$, y la altura de $5^{v}\ 2^{p}$, se tomará la pulgada por unidad lineal, y por consiguiente, la pulgada cuadrada por unidad superficial; se reducirán la base y la altura á pulgadas; y multiplicando entre sí los dos números 355 y 204 que resultan, se hallará que el área del rectángulo en pulgadas cuadradas es 72420; y como 1 pié cuadrado$=$144 pulgadas cuadradas, se reducirá aquella área á piés cuadrados dividiendo 72420 por 144, lo que dará 502 piés cuadrados$+$132 pulgadas cuadradas; y como la vara cuadrada se compone de $9^{p.\ c}$, dividiendo 502 por 9 tendrémos las varas cuadradas contenidas en el área del rectángulo propuesto. Efectuando la division, se hallará que el área buscada es de $55^{v.\ c.}\ 7^{p.\ c.}\ 132^{pulg.\ c.}$

TEOREMA V.

366. *Dos paralelógramos* AC *y* AF *de la misma base* AB *y altura* FE *son equivalentes* (fig. 164).

Por tener los dos paralelógramos la misma base AB y altura FE, sus bases superiores DC y GF estarán sobre una misma recta GDFC (68).

Supuesto esto, los triángulos GAD y FBC tienen un ángulo igual comprendido entre lados respectivamente iguales; porque GA=FB como lados opuestos de un mismo paralelógramo AF, y por análoga razon AD=BC; además, el ángulo GAD es igual al FBC, porque ambos tienen sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido. Luego el triángulo GAD es igual al FBC. Pero si del trapecio ABCG se quita el triángulo GAD, queda el paralelógromo AC y si del mismo trapecio se quita el segundo triángulo FBC, queda el paralelógramo AF; luego AC y AF son equivalentes, porque es indudable que si de una misma figura se quitan superficies iguales, las restantes tendrán tambien la misma superficie, y serán por lo mismo equivalentes (169).

367. Corolario. *El área de un paralelógramo es igual al producto de su base por su altura.*

Porque todo paralelógramo es equivalente á un rectángulo de su misma base y altura (366); luego su área será el producto de estas dos dimensiones (361).

Teorema VI.

368. *Todo triángulo es mitad de un paralelógramo de la misma base y altura que él.*

En efecto, si tiramos por los vértices de los ángulos B y C del triángulo ABC (fig. 77) paralelas BE y CE á los lados opuestos, formarémos un paralelógramo ABEC de igual base y altura que el triángulo, y su diagonal BC le descompondrá en dos triángulos iguales (196).

369. Corolario I. *El área de un triángulo es igual á la mitad del producto de su base por su altura* (367).

370. Corolario II. *Las áreas de dos triángulos cualesquiera son entre sí como los productos de sus bases por sus alturas*; y por lo mismo, *como sus bases cuando tengan igual altura; y como sus alturas cuando tengan igual base.*

Teorema VII.

371. *El área de un triángulo es igual á la raiz cuadrada del producto que se obtiene multiplicando su semi-perímetro por los restos que sucesivamente se forman restando de este cada uno de los lados*

Sea ABC el triángulo propuesto (fig. 116). Representemos por a, b, c, las longitudes respectivas de los lados BC, AC y AB; y por h la de la altura AI. Claro es que si se conociese uno de los segmen tos de la base, el BI por ejemplo, se podria, por el teorema de Pitágoras (260, 4.°), calcular la altura, y obtener en seguida el área del triángulo. Pero sabemos que en todo triángulo el cuadrado del lado opuesto á un ángulo agudo es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos, disminuida del doble del producto que resulte de multiplicar uno de estos por la proyeccion del otro sobre él (265): siendo, pues, BI la proyeccion del lado AB sobre BC, tendrémos:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC.BI,$$

ó sea

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2a.BI.$$

Mas si b^2 es el esceso de c^2+a^2 sobre el producto $2a.BI$, se tendrá el valor de este último quitando b^2 de c^2+a^2; es decir que

$$2a.BI = c^2 + a^2 - b^2.$$

Esta igualdad manifiesta que $c^2+a^2-b^2$ es el producto de $2a$ por BI; luego, dividiéndole por el factor $2a$, se tendrá el otro BI; y por lo tanto

$$BI = \frac{c^2+a^2-b^2}{2a}.$$

Ya conocemos en el triángulo rectángulo ABI la hipotenusa AB y el cateto BI; luego, aplicando el teorema de Pitágoras, tendrémos:

$$h^2 = c^2 - \frac{(c^2+a^2-b^2)^2}{4a^2} = \frac{4a^2c^2-(c^2+a^2-b^2)^2}{4a^2},$$

reduciendo el entero c^2 á la especie del quebrado que le acompaña Pero el numerador de la última fraccion es la diferencia entre el cuadrado de $2ac$ y el de $(c^2+a^2-b^2)$; y habiéndose demostrado en álgebra que *la diferencia de los cuadrados de dos cantidades es igual á la suma de estas multiplicada por su diferencia*, y que *para restar una cantidad de otra, basta escribirla á su continuacion con signos contrarios á los que tiene*, se reducirá este numerador á

$$(2ac+c^2+a^2-b^2)(2ac-c^2-a^2+b^2).$$

Pero siendo $2ac+c^2+a^2=(a+c)^2$, la cantidad del primer paréntesis se reduce á $(a+c)^2-b^2$, es decir, á $(a+c+b)(a+c-b)$, porque es la diferencia de los cuadrados de $(a+c)$ y de b. El segundo paréntesis $2ac-c^2-a^2+b^2$, puede considerarse como la diferencia que queda, quitando de b^2 la cantidad a^2+c^2-2ac, esto es, el cuadrado de $(a-c)$; luego es la diferencia de los cuadrados de b y de $(a-c)$, por lo que se reduce á

$$(b+a-c)(b-a+c).$$

En virtud de estas trasformaciones, el valor hallado para h^2 se convierte en

$$h^2=\frac{(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)}{4a^2}.$$

Representando el semi-perímetro por p, y por consiguiente, el perímetro por $2p$, resultará:

$$a+b+c=2p;$$

y restando sucesivamente de ambos miembros $2a$, $2b$, $2c$, quedará:

$$\begin{aligned} b+c-a&=2(p-a),\\ a+c-b&=2(p-b),\\ a+b-c&=2(p-c); \end{aligned}$$

valores que, sustituidos en la espresion de h^2, y dividiendo en seguida los dos términos por 4, la convierten en

$$h^2=\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2};$$

por consiguiente,

$$[1]\qquad h=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a};$$

y por último, multiplicando esta cantidad por $\frac{a}{2}$, se hallará para el área A de un triángulo en funcion de sus lados:

$$A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

que manifiesta que *para calcular el área de un triángulo en funcion de sus lados, hay que restar del semi-perímetro sucesivamente cada uno de los lados, multiplicar el producto de estos tres restos por el semi-perímetro, y estraer la raiz cuadrada del resultado.*

Si se quiere calcular por logaritmos el valor de A, se hallará :

$$L.A = \frac{L.p + L.(p-a) + L.(p-b) + L.(p-c)}{2},$$

fórmula fácil tambien de traducir al lenguaje vulgar.

EJEMPLO. Los tres lados de un triángulo valen respectivamente $1370^m,34$; $1827^m,12$; $2283^m,9$: ¿cuál es su área?

Representando estos tres lados por a, b, c respectivamente, y su suma por $2p$, y ejecutando los cálculos siguientes :

$a =$	$1370^m,34$		
$b =$	$1827\ ,12$		
$c =$	$2283\ ,90$		
$2p =$	$5481^m,36$		
$p =$	$2740\ ,68$	$L.p =$	3,4378584
$p-a =$	$1370\ ,34$	$L.(p-a) =$	3,1368284
$p-b =$	$913\ ,56$	$L.(p-b) =$	2,9607371
$p-c =$	$456\ ,78$	$L.(p-c) =$	2,6597071
			12,1951310
		$L.A =$	6,0975655
		$A =$	1251888

Se hallará que el área del triángulo es $1251888^{m.c}$, aproximada hasta menos de un metro cuadrado.

TEOREMA VIII.

372. *El área de un triángulo es igual á su perímetro multiplicado por la mitad de su apotema.*

Uniendo el centro del círculo inscripto al triángulo con los tres vértices de este, quedará dividido en otros tres, que tendrán por bases respectivas los lados de este triángulo, y por altura comun su apotema, por lo que sus áreas serán iguales á estos lados multiplicados cada uno por la mitad de esta apotema. Pero si al sumar las tres áreas parciales se pone por factor comun la mitad del apotema, se hallará por espresion del área pedida el producto de la suma de los lados del triángulo, ó sea su perímetro, por la mitad de su apotema.

TEOREMA IX.

373. *El producto de los tres lados de un triángulo es igual al doble de su área multiplicado por el diámetro del círculo circunscripto.*

Por uno de los vértices C del triángulo tiremos el diámetro CD (fig. 166), unamos A con D, y bajemos desde el vértice A la perpendicular AF sobre el lado opuesto BC; y los dos triángulos DAC, BAF serán equiángulos por ser rectángulos, uno en A, otro en F, y tener los ángulos D y B iguales como inscriptos en el mismo segmento CBDA: por lo tanto tendrán proporcionales sus lados homólogos, y darán

$$\frac{DC}{AB}=\frac{AC}{AF};$$

de donde resulta

$$AB.AC=AF.DC.$$

Multiplicando cada uno de estos dos productos por BC, resultará:

$$BC.AB.AC=BC.AF.DC,$$

igualdad que demuestra la proposicion; porque BC.AF es el doble del área del triángulo ABC, y DC es el diámetro del círculo circunscripto.

TEOREMA X.

374. *El área de un trapecio* AC *es igual á la semi-suma de sus bases paralelas* AB *y* CD *multiplicada por su altura* DE (fig. 75).

Tirando la diagonal DB, quedará el trapecio dividido en dos triángulos ADB y BCD, cuyas áreas sumadas darán la del trapecio ABCD.

Pero el triángulo ABD tiene por medida la mitad de su base AB multiplicada por su altura DE, ó sea

$$\tfrac{1}{2}AB.DE:$$

el BCD tiene igualmente por medida

$$\tfrac{1}{2}DC.DE;$$

porque la perpendicular que se bajase de su vértice B sobre la base CD seria igual á DE como paralelas comprendidas entre otras paralelas : sumando los dos productos anteriores y poniendo DE como factor comun, resultará

$$(\tfrac{1}{2}AB + \tfrac{1}{2}DC) . DE \text{ ó sea } \frac{AB + DC}{2} . DE,$$

esto es, la semi-suma de las bases paralelas del trapecio multiplicada por su altura.

375. Corolario. Si tiramos por el punto G, medio de AD, la GLK que sea paralela á las bases AB y CD, formarémos el triángulo DGL semejante al DAB, y cuyos lados serán proporcionales con los de este. Pero siendo DG mitad de DA, DL y GL lo serán tambien respectivamente de DB y AB ; luego *si por el medio de uno de los lados de un triángulo se tira una paralela á otro de sus lados, esta será la mitad del lado á quien es paralela, y pasará por el punto medio del tercero.* De aquí se sigue que el punto K será el medio de CB, y LK la mitad de CD ; y por lo mismo GK será la semi-suma de las dos bases AB y DC ; luego *tirando por el medio de uno de los lados no paralelos de un trapecio una paralela á las bases, esta recta pasará por el medio del otro lado, y será la semi-suma de las dos bases.*

Por esta razon se puede tambien decir que *el área de un trapecio tiene por medida el producto de la recta que une los medios de los lados no paralelos multiplicada por su altura.*

376. Fundándose en la fórmula [1] del número **371**, es fácil calcular la superficie de un trapecio en funcion de sus lados. Por ejemplo, supongamos que los lados paralelos AB y CD sean respectivamente de 10 y de 6 metros, y los otros dos AD y BC de 3 y de 5 metros. Tiro DO parálela á CB : esta recta valdrá 5 metros, y $AO = 10 - 6 = 4$. Segun esto el perímetro del triángulo ADO será de 12 metros, y se tendrá : $p=6$, $p-AO=2$, $p-DO=1$, $p-AD=3$; luego, en virtud de la fórmula [1] del número **371**, $h=\tfrac{2}{4}\sqrt{6.2.1.3}=3$, como hubiera podido preveerse, pues siendo los lados DA, OA y OD del triángulo ADO de 3 metros el primero, 4 el segundo y 5 el tercero, es preciso que sea recto el ángulo A (**266**, 3.°). Por consiguiente, el área del trapecio tendrá por medida

$$\frac{10+6}{2} . 3 = 24^{\text{m.c.}}$$

Teorema XI.

377. ***El área de cualquiera polígono regular es igual á su perímetro multiplicado por la mitad de su apotema.***

Uniendo el centro del círculo inscripto en el polígono con cada uno de los vértices de este, se le dividirá en tantos triángulos como lados tenga, y sumando las áreas de todos estos, se tendrá la del polígono propuesto; y como los triángulos tendrán por bases los diferentes lados del polígono, y por altura comun el apotema, cada uno de ellos tendrá por medida el producto de multiplicar el lado que le sirva de base por la mitad del apotema. Al sumar estas áreas parciales puede sacarse por factor comun la mitad del apotema, y de este modo se hallará, para la espresion del área que se busca, el producto de la suma de los lados del polígono, ó sea su perímetro, por la mitad del apotema.

378. Corolario. Siendo esta espresion del área de un polígono regular independiente del número de sus lados, debe convenir al círculo, porque se puede este considerar como el límite de un polígono circunscripto en que el número de lados haya llegado á ser infinito (344 [1]); luego

Teorema XII.

379. ***El área de un círculo es igual al producto de la circunferencia multiplicada por la mitad del radio;*** es decir que

$$\textit{Círc.}^{\circ}\ \mathrm{R} = \textit{circ.}^{a}\ \mathrm{R} \times \tfrac{1}{2}\mathrm{R}\ (^1).$$

380. Corolario I. De esta ecuacion y de la regla dada (350) para

---

[1] Esto mismo puede demostrarse de la siguiente manera: Si al círculo propuesto se circunscribe un polígono regular cualquiera, y designamos por A su área y por P su perímetro, tendrémos

$$\mathrm{A} = \mathrm{P}.\tfrac{1}{2}\mathrm{R}.$$

Pero si se van circunscribiendo al círculo otros polígonos regulares cuyo número de lados vaya siendo cada vez mayor, A y P variarán, pero siempre subsistirá la ecuacion anterior, aun en el caso de que llegue á ser infinito el número de los lados. Entonces A y P habrán llegado ya á sus respectivos límites, *circ.*° R y *circ.*ª R; de modo que tendrémos

$$\textit{Circ.}^{\circ}\ \mathrm{R} = \textit{circ.}^{a}\ \mathrm{R}.\tfrac{1}{2}\mathrm{R};$$

porque los límites de dos cantidades variables que permanecen constantemente iguales, tambien son iguales.

N. R. Y.

calcular la circunferencia de un círculo en funcion de su radio, se deduce para espresion del área del círculo

$$2\pi . R \times \tfrac{1}{2} R = \pi . R^2 ;$$

así es que

$$\textit{Círc.}^{\circ}\ R = \pi R^2 ;$$

luego *para calcular el área de un círculo hay que multiplicar por el cuadrado del radio la razon de la circunferencia al diámetro.*

Si quisiéramos, por ejemplo, hallar el área de un círculo de 3 metros de radio, aproximada hasta un centímetro cuadrado, observaríamos que, siendo la espresion del área 9π, para que el error no llegue á un centímetro cuadrado, esto es, á $\frac{1}{10000}$ de metro cuadrado, será necesario, siguiendo la regla del número 342 de la *Aritmética*, tomar el valor de π aproximado hasta $\frac{1}{1000000}$. De este modo se hallará

$$9\pi = 3{,}141592 \times 9 = 28{,}274328 ;$$

y como la quinta cifra es menor que 9, se deduce que $28^{\text{m.c.}}{,}2743$ es el área del círculo aproximada hasta un centímetro cuadrado.

381. Corolario II. Tambien se deduce del teorema precedente que *para hallar la* cuadratura del círculo, es decir, para construir un cuadrado equivalente á un círculo dado, *no hay mas que buscar una media proporcional entre la mitad de la circunferencia del círculo y su radio*, y se tendrá así el lado del cuadrado que se pide. Mas como no hay medio geométrico de rectificar la circunferencia (355), se sigue que tampoco le hay para hallar la cuadratura del círculo. Así es que, aunque no se ha demostrado que sea imposible resolver este problema *sin emplear mas que la regla y el compás*, la infructuosidad de cuantas tentativas se han hecho para conseguirlo desde hace mas de dos mil años, da derecho á creer que no es del dominio de la geometría elemental. Con todo, si se quiere hallar *aproximadamente* el lado de un cuadrado equivalente al círculo OC (figura 165), se describirá sobre GI (356) por diámetro una semi-circunferencia; se abatirá en O′I el radio OI; se levantará la O′M perpendicular á IG, y uniendo I con M, se tendrá muy aproximadamente el lado pedido (263, 2.°).

Por cálculo puede resolverse este problema con una aproximacion casi indefinida; porque ya hemos visto que se ha llevado la determinacion de la razon de la circunferencia al diámetro hasta 154 cifras decimales. Si quisiéramos, por ejemplo, el lado de un cuadrado equivalente al círculo que tuviese por radio 3 metros, y se le quisiese tener aproximado hasta una milésima, como dicho lado tendria por espresion $\sqrt{9\pi}$, tomaríamos el valor de π aproximado hasta una unidad del sesto órden decimal, y obtendríamos $9\pi = 28{,}274328$ en que el error no llega á una millonésima. Estrayendo su raiz cuadrada, tendrémos para el lado que se pide $5^m{,}317$.

Teorema XIII.

382. *El área de un* SECTOR AMBO (fig. 167) (así se llama la porcion de círculo comprendida entre un arco y los radios tirados á sus estremos) *es igual al arco* AMB, *que le sirve de base, multiplicado por la mitad del radio* AO.

Razonando como lo hemos hecho en el número **109**, se demostrará que la razon entre el área de un sector y la del círculo es igual á la que hay entre el arco de aquel y la circunferencia; de modo que, llamando A al área del sector, a á la longitud del arco que le sirve de base, y R al radio del círculo á que pertenece, se tiene la proporcion.

$$\frac{A}{\textit{círc.}^o\ R} = \frac{a}{\textit{circunf.}^a\ R}.$$

Multiplicando los dos términos de la segunda razon por $\frac{1}{2}$R, resulta

$$\frac{A}{\textit{círc.}^o\ R} = \frac{a \times \frac{1}{2}R}{\textit{circunf.}^a\ R \times \frac{1}{2}R};$$

y como sabemos que $\textit{círc.}^o\ R = \textit{circunf.}^a\ R \times \frac{1}{2}R$ (379), tendrá que ser

$$A = a \times \tfrac{1}{2}R,$$

que demuestra la proposicion enunciada.

383. Vemos así, que para valuar el área de un sector cuando solamente se dé el radio y el número de grados y partes de grado del arco que le sirva de base, debe empezarse por calcular la longitud de este arco.

Primer ejemplo. Supongamos que se pide el área de un sector cuyo arco sea de $15^g{,}75'$, y cuyo radio $= 12^m{,}7$. Observando que en un mismo círculo las longitudes de los arcos son proporcionales á los números de grados y partes de grado que contengan, y que la longitud del arco de 200^g es en este caso $12^m{,}7 \times \frac{22}{7}$ (350), valiéndonos de la relacion de Arquímedes, se tendrá la longitud del arco de $15^{G},75'$ por la proporcion:

$$\frac{200^{G}}{15^{G},75'}=\frac{12^{m},7\times\frac{22}{7}}{x^{m}};$$

de donde se obtiene $x=3^{m},14325$, sustituyendo en vez de la razon de los números concretos 200^{G} y $15^{G},75'$ la equivalente $\frac{200}{15,75}$. Por lo tanto, el área del sector será igual á

$$(3,14325\times\frac{12,7}{2})^{m.c.}=19^{m.c.},9596.$$

Segundo ejemplo. Supongamos que siendo el arco de $15^{0}25'$, y el radio de 4 brazas y 5 pies, se pida el área del sector en brazas cuadradas, piés cuadrados, etc. Si conociésemos el área pedida en piés cuadrados, fácil seria valuarla en brazas cuadradas, porque vale cada una de estas 36 piés cuadrados (365). Tomemos, pues, el pié por unidad lineal, y reduzcamos las $4^{b}\ 5^{p}$ á piés, lo que dará 29^{p} y determinemos la longitud del arco de $15^{0}25'$ por la proporcion

$$\frac{180^{0}}{15^{0}25'}=\frac{29^{p}\cdot\frac{22}{7}}{x^{p}},$$

en la cual, para sustituir en vez de la razon de los números concretos 180^{0} y $15^{0}25'$ otra de números abstractos, convertirémos aquellos dos números á minutos, con lo que se hallará la razon $\frac{10800}{925}=\frac{432}{37}$; por lo tanto, $\frac{432}{37}=\frac{29\,.\,\frac{22}{7}}{x}$, de la cual sale $x=\frac{29^{p}\cdot 11\,.\,37}{1512}$.
Tal es la longitud de un arco de $15^{0}25'$ en la circunferencia que tenga por radio 29^{p}. Para tener el área del sector, no falta mas que hacer el producto de los números abstractos $\frac{29\,.\,11\,.\,37}{1512}$ y $\frac{29}{2}$ que espresan las razones del arco y de la mitad del radio con el pié, y se endrá $\frac{342287}{3024}$ piés cuadrados, ó lo que viene á ser lo mismo, $113^{p.c}27^{pulg.c}\ 54^{l.c}\,\frac{6}{7}=3^{brazas.c}\ 5^{p.c}\ 27^{pulg.c}\ 54^{l.c}\,\frac{6}{7}$.

384. *Se llama* SENO *de un arco la perpendicular bajada desde uno de sus estremos sobre el radio que pasa por el otro;* así, AP es el seno del arco AMB (fig. 167); en donde vemos que este seno es la mitad de la cuerda AA′ que subtiende al AMA′, doble del AMB.

TEOREMA XIV.

385 *El área de un* SEGMENTO *de círculo* AMBA (fig. 167) (se llama así la porcion de círculo comprendida entre un arco y su cuerda) *es igual á la mitad del radio multiplicada por el esceso del arco sobre el seno.*

En efecto, el área del segmento AMB es evidentemente la diferencia entre la del sector AMBO y la del triángulo ABO; pero el sector tiene por medida $\frac{BO}{2}.AMB$; la del triángulo es igual á $\frac{BO}{2}.AP$: luego el segmento tendrá por medida la diferencia entre estos dos productos, es decir, poniendo $\frac{BO}{2}$ por factor comun, $\frac{BO}{2}.(AMB-AP)$, como se queria demostrar.

386. Conociendo un arco y su radio, debia ser fácil de calcular el segmento de círculo correspondiente, porque el seno estaria por precision determinado. Sin embargo, solo en un corto número de casos particulares se puede por geometría elemental hallar el seno de un arco dado.

EJEMPLO. *Calcular el área de un segmento cuyo arco es de* 60^0 *en el círculo cuyo radio es* R.

Observando que el arco de 60^0 es la sesta parte de la circunferencia, se deducirá del n.° 350 que su longitud es igual á $\frac{\pi R}{3}$. Por otra parte, el seno de este arco es la mitad del lado del triángulo equilátero inscripto (384), porque este lado subtiende á un arco de 120^0; luego el área que se busca tendrá por espresion

$$\left(\frac{\pi R}{3}-\frac{R\sqrt{3}}{2}\right).\frac{R}{2}=\frac{(2\pi-3\sqrt{3})R^2}{12}.$$

Para resolver este problema, habrá que recurrir, en general, á la *Tabla de cuerdas.* En efecto, el seno AP de un arco AMB es la mitad de la cuerda AA′ que subtiende al arco AMA′ doble de AMB. Si, por ejemplo, se quiere calcular el área de un segmento cuyo arco es de $86^0 11'$ en el círculo cuyo radio es R, tendrémos que el seno de este arco será la mitad de la cuerda que subtiende al de $172^0 22'$. Mas nuestra tabla solo alcanza hasta 90°, por lo que parece que no se puede hallar tal cuerda; pero no es así, pues tomando el suplemento de 172°22′ que es 7°38′, hallaré en la tabla que la cuerda de este arco es 13,31. Mas si AA′ (fig. 167) es la cuerda de 172°22′, A′C es la de 7°38′, y el triángulo rectángulo AA′C dará $AA' = \sqrt{4R^2 - \overline{A'C}^2}$; y como la diferencia de los cuadrados de dos cantidades es igual al producto de su suma por su diferencia, se tendrá:

$$AA' = \sqrt{(2R + A'C)(2R - A'C)};$$

en que, tomando los logaritmos,

$$L.AA' = \frac{L.(2R + A'C) + L.(2R - A'C)}{2},$$

fórmula por cuyo medio se podrá calcular la cuerda de un arco mayor que un cuadrante en funcion de la del arco suplementario. Aplicada al caso actual, en que el radio de la tabla vale 100 unidades, y $A'C = 13,31$, se verá que

$$\begin{array}{ll r}
2R + A'C = 213,31 & Log.(2R + A'C) = & 2,3290112 \\
2R - A'C = 186,69 & Log.(2R - A'C) = & \underline{2,2711211} \\
 & & 4,6001323 \\
 & L.A'A = & 2,3000661 \\
 & AA' = & 199,56 \\
 & \text{Por consiguiente, } sen\ AMB = & 99,78
\end{array}$$

Pero las cuerdas, y por consecuencia los senos de los arcos semejantes son proporcionales á los radios de estos arcos (282); luego el seno de 86°11′, en el círculo cuyo radio es R, valdrá R.0,9978. Se hallará además fácilmente que la longitud de este arco es R.3,0096; luego la diferencia con su seno es $R(3,0096 - 0,9978) = R.2,0118$, y por lo mismo el área del segmento será $R.2,0118.\frac{R}{2} = R^2.1,0059$.

Problema I.

387. *Medir el área de un polígono irregular cualquiera.*

Dos casos pueden presentarse, segun que sea ó no accesible el interior del polígono.

Primer caso. 1.° Si se puede recorrer el polígono en todas direcciones, se le dividirá en triángulos, cuidando de tirar todas las líneas de division desde un mismo ángulo, si es posible, y no habrá mas que valuar las áreas de todos ellos. Siempre que se pueda, y con objeto de abreviar las operaciones, se dará la misma base á dos triángulos adyacentes; porque así, al sumar sus áreas, se podrá sacar esta base por factor comun, y se verá que el área del cuadrilátero formado por dichos dos triángulos es igual á la base comun multiplicada por la semi-suma de sus alturas. De este modo se reemplaza á una multiplicacion una suma. En la figura 168 se tomará la diagonal AC por base comun de los triángulos ABC y ADC, y bajando sobre ella las perpendiculares BB′ y DD′, se verá que, por ser el área del primero $AC.\frac{BB'}{2}$, y la del segundo $AC.\frac{DD'}{2}$, la del cuadrilátero ABCD será $AC.\frac{BB'+DD'}{2}$. Tomando igualmente AE por base comun de los dos triángulos ADE y AFE, se hallará que el área del cuadrilátero ADEF tiene por medida $AE.\frac{DD''+FF'}{2}$; y como la del triángulo AGF está espresada por $AF.\frac{GG'}{2}$, se concluirá que la medida del área del polígono entero es

$$\tfrac{1}{2}\{AC.(BB'+DD')+AE.(DD''+FF')+AF.GG'\}.$$

Sin embargo, observarémos que es mas sencillo, y sobre todo mas exacto, valuar el área de cada triángulo en funcion inmediata de sus lados (371), pues así no habrá que bajar la altura de cada uno.

2.° Tambien puede calcularse el área de un polígono cualquiera irregular, descomponiéndole en triángulos y trapecios rectángulos. Para esto, se tira en la direccion de su mayor latitud una recta AI que vaya de un ángulo á otro del polígono (fig. 169), á la cual llamarémos *directriz;* despues se bajarán desde los vértices B, C, D, K las perpendiculares á esta recta BB′, CC′, DD′, KK′ y desde los puntos F y G, las FF′ y GG′ tambien perpendiculares á DD′. Midiendo en seguida AB′, B′C′, C′D′, D′I, BB′, KK′, CC′, DF′, F′G′, G′D′, FF′ y GG′, se tendrán los elementos necesarios para determinar las áreas de todas las partes ABB′, BC′, CD′, DFF′, FG′, GD′ y AKI, en que se ha descompuesto el polígono. Supongamos, por ejemplo, que se haya encontrado

$AB'=15^m,8$; $B'C'=12^m,6$; $C'D'=21^m,4$; $D'I=30^m,2$
$BB'=17\ ,3$; $KK'=18\ ,1$; $CC'=10\ ,5$; $DF'=10\ ,8$
$F'G'=16\ ,4$; $G'D'=11\ ,0$; $FF'=14\ ,1$; $GG'=\ 8,\ 6$;

resultará inmediatamente que $AI = 80^{m}$, y $DD' = 38^{m},2$ (deben medirse directamente estas líneas para tener una comprobacion). Así, verémos que

$$
\begin{aligned}
ABB' &= \tfrac{15{,}8}{2}.\,17{,}3 &&= 136^{m.c},67\\
BC' &= (17{,}3 + 10{,}5).\,\tfrac{12{,}6}{2} &&= 175\ \ ,14\\
CD' &= (10{,}5 + 38{,}2).\,\tfrac{21{,}4}{2} &&= 521\ \ ,09\\
DFF' &= \tfrac{10{,}8}{2}.\,14{,}1 &&= 76\ \ ,14\\
FG' &= (14{,}1 + 8{,}6).\,\tfrac{16{,}4}{2} &&= 186\ \ ,14\\
GD' &= (8{,}6 + 30{,}2).\,\tfrac{11}{2} &&= 213\ \ ,40\\
AKI &= \tfrac{80}{2}.\,18{,}1 &&= 724\ \ ,00\\
\hline
& && \ 2032\ \ ,58
\end{aligned}
$$

y que, por lo tanto, el área del polígono es de $2032^{m.c},58$.

Segundo caso. Si lo interior del polígono fuese inaccesible (figura 169), como lo seria un estanque ó un monte lleno de maleza, se le circunscribiria un rectángulo, cuidando para mayor sencillez de que uno de sus lados siga la direccion de uno de los del polígono, y de que pasen los otros por tres vértices del mismo. Por medio de paralelas á los lados del rectángulo tiradas desde los vértices del polígono, se dividirá el espacio que media entre su perímetro y el del rectángulo en triángulos y trapecios rectángulos (si alguna parte no se prestase á esta descomposicion, la dividiriamos en triángulos por medio de diagonales), cuyas áreas seria fácil apreciar. Restando la suma de estas de la del rectángulo, se tendria evidentemente la del polígono.

388. Si fuesen curvas una ó varias partes del perímetro de la superficie plana que se hubiera de medir (fig. 170), se distinguirán tambien dos casos, segun que se pudiese ó no penetrar en lo interior de la figura; y en cada uno de ellos se procederia como hemos hecho en el número 387. La dificultad quedaria entonces reducida á medir los espacios B'BCQDFF', GII' y PON, ó CB''B, CQD, DFF'', GII'', ONN', ORP'P, por lo que nos ocuparémos de valuar estas diferentes áreas.

Problema II.

389. *Medir el área de la superficie comprendida entre una curva* AMB, *una recta* A'B' *y las perpendiculares bajadas sobre esta desde los dos estremos de la curva* (fig. 171).

Divídase la recta A'B' en cierto número de partes iguales, y por todos los puntos de division C′, D′, F′ se levantarán perpendiculares C′C, D′D, F′F á la A′B′ (bastará con fijar jalones en los puntos en que corten á la línea AMB). Si estas perpendiculares están suficientemente próximas, los arcos AC, CD, DF, FB se diferenciarán muy poco de sus cuerdas, de modo que se podrá, sin error sensible, considerar al *segmento* A′AMBB′ como dividido en trapecios rectangulares. Será fácil valuar sus diferentes partes, y se hallará que

$$A'C = \frac{AA' + CC'}{2} . A'C', \qquad C'D = \frac{CC' + DD'}{2} . A'C',$$

$$D'F = \frac{DD' + FF'}{2} . A'C', \qquad F'B = \frac{FF' + BB'}{2} . A'C',$$

puesto que todos estos trapecios tienen alturas iguales á A′C′. Sumando estos productos, podrá sacarse á A′C′ como factor comun, y teniendo presente que la mitad de cada una de las perpendiculares intermedias CC′, DD′, FF′ está repetida dos veces, se hallará finalmente que

$$A'AMBB' = \left\{ \frac{AA' + BB'}{2} + CC' + DD' + FF' \right\} . A'C',$$

resultado que nos manifiesta que, *para valuar el área de un segmento curvilíneo cualquiera, hay que dividir su base en un número de partes iguales, tanto mayor cuanta mas exactitud se quiera; levantar en los diferentes puntos de division perpendiculares á esta base; añadir despues á la semi-suma de las dos perpendiculares estremas todas las perpendiculares intermedias, y multiplicar el resultado por la distancia entre dos puntos de division consecutivos.*

Esta regla comprende evidentemente, como caso particular, el de que los dos estremos de la curva, ó uno solo de ellos se hallen sobre la base del segmento; porque entonces bastaria mirar como nulas las dos perpendiculares estremas, ó una sola de ellas.

Problema III.

390. *Valuar el área de la superficie comprendida entre dos líneas curvas y dos rectas paralelas; ó envuelta por una curva.*

1.° Si se puede entrar en el interior de la figura cuya área se va á medir se trazará una perpendicular *af* á las dos paralelas AA′ y FF′ (fig. 173); se la dividirá en un cierto número de partes iguales, y por todos los puntos de division se tirarán paralelas á AA′. De este modo el área de AF′ quedará dividida en cierto número de figuras que se podrán considerar como trapecios que tengan todos por altura comun la distancia *ab* entre dos puntos de division consecutivos, y valuando las áreas de estos diferentes trapecios, se hallará que la suma, es decir, *el área de* AF′ *tiene por medida el producto que se obtiene multiplicando la semi-suma de las dos paralelas estremas, aumentada en todas las demás paralelas, por la distancia entre dos consecutivas.*

Tal es la regla que se sigue para medir el área de la seccion horizontal hecha en la carena de un buque, ó de la vertical determinada en esta misma carena por un plano paralelo al de simetría del mismo.

Si hay que medir una superficie terminada por todos lados por una curva, tambien se la dividirá en trapecios, trazando en su interior una ó varias directrices: así, en el caso de la figura 174, se tirará una primera directriz AB, en cuyos estremos se levantarán dos perpendiculares AA′ y BB′; luego se tirará una segunda directriz CD′ perpendicular á BB′ y en D′ una paralela D′D á BB′. Quedará así dividida el área propuesta en cuatro partes AMA′, A′ATBB′, BB′D′D y DND′, que ya se sabe valuar.

Harémos notar que si AB y CD′ tuviesen una comun medida que no fuese muy pequeña, se podria calcular directamente el área AA′B′D′DBT, llevando esta comun medida sobre AB y CD′, y levantando perpendiculares á estas líneas en los puntos de division (390).

2.° Si no se puede penetrar en el interior de la superficie que se ha de medir, se la encierra en un rectángulo PQRS (fig. 174), del que uno, por lo menos, de los lados sea tangente á la curva BMB′N: despues se dividirán los dos lados PQ y RS en un mismo número de partes iguales, y por los puntos de division se tirarán paralelas á las dos tangentes PS y QR. No faltará ya mas que medir las partes de estas paralelas comprendidas entre su punto de salida y el arco correspondiente de la curva, y fácilmente se deducirán las longitudes de las porciones comprendidas en la curva, y por consiguiente el área pedida.

391. El método que acabamos de esponer para valuar el área de una porcion de superficie plana terminada en todo ó en parte por una ó mas líneas curvas, da un medio muy sencillo para trazar una curva semejante á otra dada AMB. Para ello se tira en el plano de la última una recta A′B′ (fig. 171); despues, habiendo marcado en la

curva los puntos que parezcan los mas lejanos y los mas próximos á esta recta, puntos que se llaman *máximos* y *mínimos*, como igualmente los de *inflexion*, es decir, aquellos en que su curvatura cambia de sentido; se divide el intérvalo comprendido entre dos puntos consecutivos en partes muy pequeñas, y de todos los puntos de division se bajan perpendiculares sobre A′B′. Hecho esto, se toman sobre una recta indefinida partes *a′c′*, *c′d′*, *d′f′*, *f′b′*, que contengan tantas iguales de la escala como unidades hay en las correspondientes de A′B′, y en seguida se levantarán en los diversos puntos *a′*, *b′*, *c′*,..... perpendiculares *aa′*, *bb′*, *cc′*,..... que contengan tantas partes de la escala como unidades lineales contienen sus correspondientes AA′, BB′, CC′..... El polígono rectilíneo *a′acdfbb′* será semejante al rectilíneo A′ACDFBB′; porque cada cuadrilátero del primero será semejante al correspondiente del segundo (**287**), y además están todos semejantemente colocados en ambos polígonos. Si unimos, pues, los puntos *a*, *c*, *d*, *f*, *b* por un trazo seguido, la curva *acdfb* será semejante á la ACDFB, con tanta mas exactitud cuanto mas próximos se hallen los vértices A, C, D, F, B.

Cuando se trate de una curva tal como la representada en la figura 174, se formarán primero las partes ABD y A′B′D′, y luego las restantes AMA′ y DND′, tomando primero AB y CD′, y despues AA′ y DD′ por directrices.

Puede emplearse este método en una multitud de circunstancias. Por ejemplo, queriendo profundizar un puerto, bien se comprende que hay necesidad de conocer la figura de su fondo. Para conseguirlo, se divide la superficie del puerto por dos séries de líneas horizontales paralelas y equidistantes, y por medio de una sonda se miden las distancias de todos los puntos de seccion de estas diferentes líneas al fondo del puerto. Por este medio puede trasladarse al papel la curva resultante de la interseccion de este fondo con el plano vertical que pasa por cada horizontal, y adquirir una idea tanto mas exacta de su figura, cuanto mas inmediatas se hallen estas secciones.

PROBLEMA IV.

392. *Sustituir por una recta la ondulada* ABCD (fig. 172) *que sirve de límite comun á dos fincas terminadas por las rectas* XX′ *é* YY′; *haciendo la sustitucion de modo que en nada se altere la superficie de cada finca.*

Levántese en el punto A la AG perpendicular á XX'; mídanse los segmentos ABE, FDG y ECF que esta perpendicular forma con la línea ABCD, y es evidente que tomando por límite de las dos fincas la recta AG, la XABCDY quedará aumentada con los dos primeros segmentos y disminuida del tercero; luego si el área de este fuese igual á la suma de las de los otros dos, la recta AG resolveria el problema. Pero si fuese ABE + FDG > ECF, se tomará sobre AX una distancia AI igual al cociente que se obtenga dividiendo por $\frac{AG}{2}$ el esceso de ABE + FDG sobre ECF; y como el área del triángulo AIG, que se forma uniendo I con G, será precisamente igual á este esceso, porque $AI . \frac{AG}{2} = ABE + FDG - ECF$, la recta IG será evidentemente el límite nuevo, pues cortará una parte de XAGY, precisamente igual al área que le sobraba.

Como observa Mr. Puissant en su *Tratado de Geodesia*, es notable esta solucion por su estrema sencillez, porque es independiente del conocimiento de las dos áreas contiguas.

CAPÍTULO II.

COMPARACION DE ÁREAS.

TEOREMA I.

393. *El cuadrado* BO *construido sobre la hipotenusa* BC *de un triángulo rectángulo* ABC (fig. 175), *es equivalente á la suma de los cuadrados* AD *y* AF *construidos sobre los catetos.*

Bajando desde el vértice A del ángulo recto la AI perpendicular á la hipotenusa, y prolongándola hasta el lado opuesto del cuadrado BO, quedará este dividido en dos rectángulos BL y CL, que vamos á demostrar que son equivalentes á los cuadrados respectivos AF y AD. Para conseguirlo, tírense AK y FC, y quedarán formados los dos triángulos FBC y ABK, que son mitades de AF y BL; porque el triángulo FBC, por ejemplo, tiene la misma base FB y la misma altura AB que el cuadrado AF. Pero estos dos triángulos son iguales, porque el ángulo FBC, compuesto del ABC y del recto FBA, es igual al ABK, compuesto del mismo ABC y del recto CBK: además, los dos lados FB y BC que comprenden al ángulo FBC son respectivamente iguales á los AB y BK que comprenden al ABK. Esto equivale á decir que la mitad del cuadrado AF, que es el triángulo FBC, es igual á la mitad del rectángulo BL, que es el triángulo ABK: por consiguiente, el rectángulo y el cuadrado son equivalentes. Lo mismo se probaria que el cuadrado AD y el rectángulo CL tambien son equivalentes. Luego el cuadrado BO, suma de los dos rectángulos BL y CL, lo es tambien de los cuadrados AF y AD.

394. COROLARIO I. Como los dos rectángulos BL, CL y el cuadrado BO, que tienen la misma altura IL, son proporcionales á sus bases (359), podrémos establecer la série de razones iguales:

$$\frac{\text{BL ó AF}}{\text{BI}}=\frac{\text{CL ó AD}}{\text{IC}}=\frac{\text{BO}}{\text{BC}};$$

que manifiesta, que *los cuadrados construidos sobre los tres lados de un triángulo rectángulo son proporcionales á las proyecciones de estos lados sobre la hipotenusa.*

395. COROLARIO II. *Los cuadrados construidos sobre las cuerdas que parten de los estremos de un mismo diámetro, son proporcionales á las proyecciones de estas cuerdas sobre dicho diámetro;* porque la razon entre el área del cuadrado construido sobre cada cuerda AB, y la proyeccion BI de esta sobre el diámetro BC, es igual (394) á la razon entre el área del cuadrado construido sobre este diámetro y este mismo diámetro, por lo cual esta razon es constante.

396. ESCOLIO. Hubieran podido deducirse del n.° 260, 4.° y 5.°, y del corolario III (264), el teorema que precede y sus dos corolarios; porque siendo la medida del área del cuadrado construido sobre una recta el número abstracto que espresa la longitud de esta recta (363), el decir que el cuadrado de la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual á la suma de los cuadrados de las longitudes de los dos catetos, equivale á la siguiente proposicion: el cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equivalente á la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos, etc.

En general, á las espresiones *cuadrado de la longitud de una recta y producto de las longitudes de dos rectas*, se podrán sustituir las espresiones respectivas *cuadrado construido sobre esta recta*, y *rectángulo formado con estas dos rectas;* así por ejemplo, el teorema de álgebra, que *el cuadrado de la suma ó de la diferencia de dos números es igual á la suma de los cuadrados de estos mismos aumentada ó disminuida del doble producto de ellos*, viene á reducirse á este de geometría : *El cuadrado construido sobre la suma ó diferencia de dos rectas es equivalente á la suma de los cuadrados construidos sobre estas dos rectas, aumentada ó disminuida del doble del rectángulo que tuviese por base una de ellas, y la otra por altura* (1).

TEOREMA II.

397. *Las áreas de dos triángulos* ABC *y* ADF (fig. 179) *que tienen un ángulo comun* A, *son proporcionales á los productos de los lados, que en cada triángulo comprenden el ángulo comun* : es decir, que se tendrá

$$\frac{ABC}{ADF}=\frac{AB.AC}{AD.AF}.$$

(1) 1.° Sobre la recta AC (fig. 176), suma de las dos dadas AB y BC, constrúyase el cuadrado ACDF ; tómese AG = AB, y por los puntos B y G tírense las BL y GI paralelas respectivamente á las AF y AC; y de este modo. el cuadrado AD será la suma de las cuatro figuras AK, DK, FK y CK. La primera es el cuadrado construido sobre AB; la segunda es un cuadrado cuyo lado es igual á BC ; porque la figura DK tiene sus cuatro ángulos rectos, el lado KI = BC; LK, que es igual á FG, diferencia entre AF y AG, es tambien igual á BC, diferencia de las líneas AC y AB, iguales á aquellas ; en fin, las dimensiones de los rectángulos FK y CK son evidentemente AB y BC.

2.° Sobre AB (fig. 177), que es la mayor de las dos líneas dadas AB y BC, construyamos el cuadrado AD ; tomemos AG igual á la diferencia AC de estas dos lineas, y tiremos por los puntos C y G las paralelas CM y GK á AF y AB, y construyamos sobre FG el cuadrado GL. La figura total ABDLIG es la suma de los cuadrados construidos sobre AB y sobre BC ; porque FG, diferencia de las líneas AF y AG ó sea de las AB y AC, es tambien igual á BC. Mas si se restan de esta figura los dos rectángulos BM é IM que tienen por dimensiones AB v BC, por ser

$$IK=IG+GK=BC+AC=AB,$$

quedará el cuadrado AK construido sobre la diferencia de las dos lineas AB y BC.

En virtud del 1.° y 2.° se puede establecer que

$$(AB\pm BC)^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2\pm 2AB.BC,$$

en que el signo superior se refiere á la figura 176, y el inferior á la 177.

Tambien se puede demostrar del modo que sigue este teorema : *El rectángulo* AG (figura 178), *que tiene por base la suma y por altura la diferencia de las dos rectas* AB *y* BC, *es equivalente á la diferencia de los cuadrados construidos sobre estas dos lineas*, ó lo que viene á ser lo mismo, *la diferencia de los cuadrados de dos números es igual á la suma de estos números multiplicada por su diferencia.*

En efecto, constrúyase sobre la mayor de las dos rectas el cuadrado AI ; despues tomando BD = BC, tírese DML paralela á AK. Es claro que MI es el cuadrado construido sobre BC ; porque como AF es por hipótesis la diferencia de las dos rectas AB y BC, y AK es igual á AB, es necesario que KF = BC ; pero la diferencia de los cuadrados AI y MI, construidos respectivamente sobre AB y BC, es la figura ABNMLK equivalente al rectángulo AG ; porque estas dos figuras tienen comun la parte ABNF, y las dos restantes MK y NC son dos rectángulos que tienen sus bases y alturas iguales. Luego

$$(AB+BC).(AB-BC)=\overline{AB}^2-\overline{BC}^2.$$

Unamos D con C, y los triángulos ABC y ADC que tienen sus bases AB y AD en línea recta, y sus vértices en el punto C, tendrán la misma altura, por lo que serán entre sí como sus bases AB y AD (370); luego

[1] $$\frac{ABC}{ADC}=\frac{AB}{AD}.$$

Del mismo modo, los triángulos ADC y ADF darán la proporcion

[2] $$\frac{ADC}{ADF}=\frac{AC}{AF}.$$

Multiplicando ordenadamente estas proporciones, y suprimiendo el factor ADC comun á los dos términos de la primera razon de la proporcion producto, se tendrá

$$\frac{ABC}{ADF}=\frac{AB\times AC}{AD\times AF};$$

lo que se queria demostrar.

398. Escolio. Para que los triángulos ABC y ADF sean equivalentes, se necesita que los dos términos de la segunda razon sean iguales, es decir, que se tenga.

$$AB\,.\,AC=AD\,.\,AF,$$

de donde

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AF}{AC};$$

ó, lo que es lo mismo, que la línea que uniera B con F fuera paralela á la que uniese D con C (246).

Teorema III.

399. *Las áreas de dos triángulos semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos* (fig. 109).

Bajando desde los vértices A y A′ las perpendiculares AI y A′I′ á los lados opuestos á estos ángulos, resultarán los triángulos rectángulos ABI y A′B′I′ que serán tambien semejantes; porque los ángulos B y B′ son iguales por suposicion (278); sus lados homólogos serán por lo mismo proporcionales, y darán

$$\frac{AI}{A'I'}=\frac{AB}{A'B'}.$$

Mas por la semejanza de los triángulos propuestos se tiene tambien

$$\frac{BC}{B'C'}=\frac{AB}{A'B'}:$$

luego multiplicando ordenadamente estas dos proporciones y dividiendo por 2 los términos de la primera razon en la proporcion que resulta, se tendrá

$$\frac{\frac{1}{2}BC.AI}{\frac{1}{2}B'C'.A'I'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2},$$

que demuestra el teorema (369).

Obsérvese que hemos espresado que los dos triángulos ABC y A'B'C' son semejantes, porque hemos escrito que tenian un ángulo igual comprendido entre dos lados proporcionales (282).

Teorema IV.

400. *Las áreas de dos polígonos semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos* (fig. 123).

Podemos dividir los dos polígonos de que se trata en un mismo número de triángulos semejantes los del primero á los del segundo, y semejantemente dispuestos (283), y despues formar otras tantas proporciones que espresen que cada uno de los triángulos del primer polígono es al que le corresponda en el segundo, como el cuadrado de uno de sus lados es al del homólogo del otro triángulo (399); así

$$\frac{DBC}{D'B'C'}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2},$$

$$\frac{ABD}{A'B'D'}=\frac{\overline{AD}^2}{\overline{A'D'}^2},$$

$$\frac{EAD}{E'A'D'}=\frac{\overline{EA}^2}{\overline{E'A'}^2},$$

$$\frac{EAF}{E'A'F'}=\frac{\overline{AF}^2}{\overline{A'F'}^2},$$

$$\frac{GAF}{G'A'F'}=\frac{\overline{AF}^2}{\overline{A'F'}^2}.$$

Pero siendo los polígonos semejantes, sus lados homólogos, diagonales homólogas (292); y por consiguiente, los cuadrados de estos lados y de estas diagonales serán proporcionales; luego las segundas razones de las proporciones anteriores son iguales, por estar formadas con los cuadrados de lados ó de diagonales homólogas de los dos polígonos; así que las primeras razones serán tambien iguales, y darán la série

$$\frac{DBC}{D'B'C'}=\frac{ABD}{A'B'D'}=\frac{EAD}{E'A'D'}=\frac{EAF}{E'A'F'}=\frac{GAF}{G'A'F'},$$

cuyos numeradores son los triángulos del primer polígono, y los denominadores los correspondientes del segundo; luego la razon entre la suma de todos los numeradores, que es el área del primer polígono ABCDEFG, y la suma de todos los denominadores, es decir, al área del segundo A'B'C'D'E'F'G', es igual á la razon que haya entre uno cualquiera DBC de los triángulos del primero y el semejante D'B'C' del segundo; ó sea igual á la razon entre el cuadrado de uno cualquiera de los lados BC del primero y el cuadrado del lado homólogo B'C' del segundo.

Teorema V.

401. *Las áreas de los polígonos regulares semejantes son proporcionales á los cuadrados de los radios de los círculos inscriptos ó circunscriptos á ellos.*

En efecto, las áreas de estos polígonos son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos (400); y como los cuadrados de estos lados lo son á los cuadrados de los radios tanto de los círculos inscriptos como de los circunscriptos, porque tambien lo son aquellos lados á estos radios; resulta que las áreas de los polígonos semejantes son proporcionales á los cuadrados de los radios correspondientes á los círculos inscriptos y circunscriptos á ellos.

Teorema VI.

402. *Las áreas de los círculos son proporcionales á los cuadrados de sus radios.*

Designando por R y por R' las longitudes de los radios de dos círculos, las áreas quedarán representadas por $\pi . R^2$ y por $\pi . R'^2$ (380), y guardarán entre sí la razon de estos dos números, y por lo mismo la de R^2 á R'^2.

403. Corolario I. *Cuando se describen tres semi-circunferencias sobre los tres lados de un triángulo rectángulo* ABC, *el área de este triángulo equivale á la suma de las áreas de las dos* lúnulas AMBN *y* APCQ (fig. 180).

Con efecto, de la série de razones iguales

$$\frac{\text{círc.}^\circ\ AB}{\overline{AB}^2}=\frac{\text{círc.}^\circ\ AC}{\overline{AC}^2}=\frac{\text{círc.}^\circ\ CB}{\overline{CB}^2},$$

se deduce que

$$\frac{\text{círc.}^\circ\ AB+\text{círc.}^\circ\ AC}{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2}=\frac{\text{círc.}^\circ\ CB}{\overline{CB}^2};$$

pero siendo iguales los denominadores, los numeradores tambien lo serán, es decir, que el círculo descrito sobre CB es la suma de los otros dos descritos sobre AB y sobre AC; luego el semi-círculo BMAPC es equivalente á la suma de los otros dos BNA y AQC. Mas, quitando del primero los dos segmentos AMB y APC, quedará el triángulo ABC; y quitando de la suma de los dos últimos los mismos segmentos, quedarán las dos lúnulas; luego, etc.

404. Corolario II. *Las áreas de dos* sectores semejantes, esto es, que correspondan á ángulos en el centro iguales, *son proporcionales á los cuadrados de sus radios.*

Sean, en efecto, S y S′ las áreas de los dos sectores; *a* y *a′* los arcos que les sirvan de base; R y R′ los radios de los círculos de que formen parte; y segun el n.° 382, se tendrá

$$\frac{S}{S'}=\frac{a\,.\,R}{a'\,.\,R'}.$$

Pero una vez que los sectores son semejantes, lo serán tambien sus arcos (349), y tendrémos

$$\frac{a}{a'}=\frac{R}{R'}.$$

Multiplicando estas dos proporciones por órden, y simplificando la resultante, se tendrá

$$\frac{S}{S'}=\frac{R^2}{R'^2}.$$

405. Corolario III. *Las áreas de dos* segmentos semejantes, esto es, que correspondan á ángulos en el centro iguales BCAI y B′C′A′I′

(fig. 150), *son proporcionales á los cuadrados de los radios de los círculos de que son parte.*

Por ser los dos sectores OACB y O′A′C′B′ semejantes, se tiene que (404)

$$\frac{OACB}{O'A'C'B'}=\frac{\overline{OA}^2}{\overline{O'A'}^2}.$$

Mas los triángulos AOB y A′O′B′ tambien son semejantes (282), y dan (399)

$$\frac{AOB}{A'O'B'}=\frac{\overline{OA}^2}{\overline{O'A'}^2};$$

pero teniendo estas dos proporciones la razon $\frac{\overline{OA}^2}{\overline{O'A'}^2}$ comun, se deduce

$$\frac{OACB}{O'A'C'B'}=\frac{AOB}{A'O'B'};$$

de la cual se saca

$$\frac{OACB-AOB}{O'A'C'B'-A'O'B'}=\frac{OACB}{O'A'C'B'} \text{ ó } \frac{\overline{OA}^2}{\overline{O'A'}^2},$$

es decir,

$$\frac{BCAI}{B'C'A'I'}=\frac{\overline{OA}^2}{\overline{O'A'}^2}.$$

CAPÍTULO III.

PROBLEMAS DE ÁREAS.

PROBLEMA I.

406. *Trasformar un polígono dado* ABCDF *en un triángulo* (figura 181).

Claro es que si supiésemos trasformar un polígono en otro que tuviera un lado menos, podriamos considerar ya resuelto el problema. Pero si unimos C con F, el polígono ABCF tendrá un lado menos que ABCDF; pero le faltará, para ser igual con este, el triángulo CDF: luego hay que añadir al ABCF una superficie igual á la de este triángulo, sin que se aumente el número de sus lados. Esto se conseguirá construyendo sobre CF un triángulo equivalente á CDF, cuyo vértice esté en AF; y bastará para ello tirar por el punto D una paralela DG á CF, y unir C con G; porque es evidente que el triángulo CGF tendrá la misma base y altura que DCF, y será, por lo tanto, equivalente á este (369). De este modo quedará el polígono propuesto ABCDF trasformado en otro ABCG que tendrá un lado menos que él. Para reducir este cuadrilátero á triángulo, unirémos B con G; por C tirarémos la CI paralela á BG, y cerrando por medio de la BI el triángulo ABI, este resolverá el problema.

Debemos observar que este triángulo tiene un lado AB y un ángulo A comunes con el polígono dado.

Notemos tambien que esta construccion conviene lo mismo á un polígono cóncavo que á uno convexo. El exágono ABCDEF (fig. 182) se ha trasformado sucesivamente en un pentágono ABCDG, en un cuadrilátero ICDG, y por último, en un triángulo ICK.

Problema II

407. *Transformar un triángulo dado en un cuadrado.*

Búsquese una media proporcional entre la base BC y la mitad de la altura AD del triángulo (fig. 183), y se tendrá el lado pedido; porque el cuadrado de esta media proporcional será igual al producto de la base del triángulo por la mitad de su altura, es decir, á su área. Por lo tanto, tomarémos el punto medio F de la altura AD se prolongará FD en una cantidad DG=BC, y describiendo una semi-circunferencia sobre FG, se determinará la media proporcional DI entre DF y DG.

408. Corolario. Pues que conocemos el medio de transformar todo polígono en triángulo, le podremos transformar tambien en cuadrado.

Problema III.

409. *Transformar un triángulo* ABC *en otro que tenga por vértice un punto dado* O, *y cuya base esté en direccion de* BC *á partir de* B *ó de* C.

Dos casos pueden presentarse, segun que el punto O se encuentre ó no sobre uno de los lados AB ó AC.

Primer caso. Supongamos el punto O sobre el lado AB (fig. 184). Si unimos O con C, se formará un triángulo BOC, que tendrá BC por base, y cuyo vértice se hallará en O; pero que será menor que el propuesto en lo que valga AOC. Si queremos aumentarle en esta cantidad, sin que cambie el número de sus lados, tirarémos por el punto A una paralela AF á OC, y unirémos O con F (389); y es fácil ver que el triángulo BOF resuelve el problema.

Segundo caso. Si el punto O (fig. 185) no está sobre lado alguuo del triángulo ABC, se reducirá este caso al primero, transformando el triángulo ABC en otro que tenga la misma base y altura que él, y uno de sus lados en la direccion de BO; para esto bastará tirar una paralela á BC por el punto A, y unir con C el punto A′, en que corte á BO.

El triángulo BOF resuelve el problema.

Problema IV.

410. *Por el punto* O *dado sobre el perímetro de un polígono* ABCDEF (fig. 186), *tirar una recta que separe en este una parte equivalente á otro polígono dado* LMNQ.

Transfórmese el polígono LMNQ en un triángulo equivalente LQR (406), y en seguida este en otro LST, cuya altura sea igual á la perpendicular bajada al lado adyacente AB desde el punto dado O: hecho esto, tómese sobre el lado AB una cantidad AG=LT, y únase O con G. Si el punto G está entre A y B queda resuelto el problema, pues el triángulo OAG es equivalente á LST, y por lo tanto, al polígono dado LMNQ; pero si G está en la prolongacion de AB, se unirá O con B; y como no se tratará mas que quitar del polígono OBCDEF una porcion equivalente al triángulo OBG, se construirá sobre OB un triángulo equivalente al OBG, y cuyo vértice esté sobre la recta indefinida BC. Para esto se tirará GH paralela á OB, y se unirá O con el punto H en que esta paralela corte á BC. Si el punto H queda entre B y C el problema está ya resuelto; porque el cuadrilátero OABH será equivalente al triángulo OAG: si lo está mas allá de C, las mismas consideraciones nos obligarán á unir O con C, tirar HI paralela á OC, á unir O con I, y si el punto I cae entre C y D, está resuelto el problema; porque siendo el triángulo OCI, equivalente á OCH, el pentágono OABCI lo será al cuadrilátero OABH, y por lo tanto, al triángulo OAG. Si, como en la figura, ei punto I está situado mas allá de D, se tirará OD, por el punto I la paralela IK á OD, se unirá O con K; y hallándose el punto K entre D y E, la recta OK resuelve el problema.

Obsérvese que *podria* ser imposible este problema si el polígono dado fuera cóncavo.

Problema V.

411. *Construir un cuadrado que sea equivalente á la suma de otros varios dados.*

Para sumar los dos primeros cuadrados, construirémos un triángulo rectángulo OAB (fig. 187) cuyos dos catetos sean iguales á los lados a y b de estos cuadrados, y es claro que el cuadrado construido sobre su hipotenusa AB es igual á la suma de ellos. Para agregar á esta suma el tercero, se levantará á AB en el punto B una perpendicular $BC = c$, se unirá A con C, y el cuadrado construido sobre AC será la suma de los tres primeros, y así continuarémos.

Problema VI.

412. *Construir un cuadrado equivalente á la diferencia entre otros dos dados.*

Se construirá (fig. 188) un triángulo rectángulo cuya hipotenusa AC y un cateto CB sean respectivamente iguales á los lados a y b de los dos cuadrados, y el cuadrado construido sobre el tercer lado AB de este triángulo resolverá el problema.

Problema VII.

413. *Dados dos polígonos semejantes, construir un tercero semejante á los dos, y cuya área sea la suma ó diferencia de las de estos dos polígonos.*

Búsquese el lado de un cuadrado que sea igual á la suma ó diferencia de los construidos sobre dos lados homólogos de los polígonos dados, y se tendrá el lado que, en el polígono pedido, debe ser homólogo á estos dos, y este problema quedará reducido al del n.° 310.

Problema VIII.

414. *Construir un cuadrado que sea á otro dado* a^2 *como una línea dada* m *es á otra* n *tambien dada*, es decir, que sea tal que, representando por x su lado, se tenga la proporcion

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{m}{n}.$$

Siendo los cuadrados construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo proporcionales á sus proyecciones sobre la hipotenusa (394), tomo sobre una recta indefinida dos partes OM y ON (fig. 189) respectivamente iguales á las m y n; con MN por diámetro, describo una semi-circunferencia; en O levanto la OP perpendicular á MN; uno P con M y N, y habré formado así el triángulo rectángulo PMN. Si en este fuese PN igual al lado a del cuadrado que se dió, PM lo seria del que buscamos; pero si no lo es, tomo sobre PN, prolongándole si es necesario, la parte $PA = a$ (téngase presente que en la proporcion $\frac{x^2}{a^2} = \frac{m}{n}$, el cuadrado a^2 debe corresponder á la línea n), trazo la AX paralela á MN, y digo que PX resuelve el problema. Con efecto, es evidente que

$$\frac{PX}{PA \text{ ó } a} = \frac{PM}{PN},$$

y que por lo mismo

$$\frac{\overline{PX}^2}{a^2} = \frac{\overline{PM}^2}{\overline{PN}^2}.$$

Pero el triángulo rectángulo PMN da la proporcion

$$\frac{\overline{PM}^2}{\overline{PN}^2} = \frac{MO}{NO} = \frac{m}{n};$$

luego, teniendo las dos últimas comun la razon $\frac{\overline{PM}^2}{\overline{PN}^2}$; se verificará que

$$\frac{\overline{PX}^2}{a^2} = \frac{m}{n}.$$

415. Un caso particular de este problema es cuando se pide un cuadrado, que sea una fraccion, por ejemplo, los $\frac{3}{5}$ del a^2, y se le puede resolver del modo que se acaba de esplicar, con solo tomar OM y ON respectivamente iguales á 3 y 5 veces una misma magnitud arbitraria; pero tambien se resuelve mas fácil y directamente del modo que sigue.

Sobre OA (fig. 190), lado del cuadrado que se da, descríbase una semi-circunferencia, divídase este lado en cinco partes iguales, y en el tercer punto de division B levántese una perpendicular BX; únase O con X, y en OX se tendrá el lado que se buscaba para el cuadrado. En efecto, el cuadrado de una cuerda es al del diámetro como la proyeccion de aquella es á este mismo (**264** y **395**); luego

$$\frac{\overline{OX}^2}{\overline{OA}^2}=\frac{OB}{OA}.$$

Pero OB es los $\frac{3}{5}$ de OA; luego el cuadrado construido sobre OX es los $\frac{3}{5}$ tambien del que se construyese sobre OA.

416. Cuando el cuadrado que se busca sea, por ejemplo, los $\frac{5}{3}$ del a^2, se dividirá el lado OA de este en tres partes iguales (figura 191): se le prolongará una cantidad igual á dos de estas partes; y entonces, como OB es los $\frac{5}{3}$ de OA $= a$, el cuadrado que se construya sobre OB será los $\frac{25}{9}$ del a^2. Por lo tanto, buscando, como antes, el lado OX de un cuadrado que sea los $\frac{3}{5}$ del construido sobre OB, quedará resuelto el problema; porque los $\frac{3}{5}$ de los $\frac{25}{9}$ del a^2 son los $\frac{25\cdot 3}{9\cdot 5}=\frac{5}{3}$ de este cuadrado.

Problema IX.

417. *Hallar una recta* x *que sea á otra dada* a, *como un cuadrado* m^2 *conocido, á otro* n^2 *que tambien lo sea;* es decir, que se verifique que

$$\frac{x}{a}=\frac{m^2}{n^2}.$$

Fundándose siempre en que los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo son proporcionales á sus proyecciones sobre la hipotenusa, se trazarán dos rectas perpendiculares entre sí, y en ellas se tomarán las distancias OM y ON (fig. 192) iguales respectivamente á los lados de los cuadrados m^2 y n^2; se unirá M con N, y bajando desde el vértice O la OP perpendicular á MN, se tendrá la proporcion

$$\frac{\overline{OM}^2}{\overline{ON}^2}\quad \text{ó sea}\quad \frac{m^2}{n^2}=\frac{MP}{NP}.$$

Si NP fuera igual á a, MP resolveria el problema. Si no lo fuese, se tomará sobre PN una magnitud PA $= a$ (obsérvese que en la anterior proporcion a debe corresponder á n^2); se trazará la AA′ paralela á OP, y hasta que corte á ON, y por último, la A′X paralela á MN. Fácilmente se ve que QX es la magnitud buscada.

418. Escolio. Si solamente se pidiese la relacion entre los cuadrados m^2 y n^2, no habria mas que buscar una tercera proporcional x á sus lados m y n, y la razon de m á x seria la misma que la de m^2 á n^2, como se comprende fácilmente.

Problema X.

419. *Construir un polígono semejante al* ABCDF, *y cuya área esté con la de este en la razon de dos rectas dadas* m *y* n (fig. 193).

Una vez que el nuevo polígono ha de ser semejante al ABCDF, las áreas de los dos serán proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos; y como tambien dichas áreas lo han de ser á las rectas m y n, vemos que los cuadrados de estos lados homólogos han de guardar la razon de m á n, y que por lo mismo para hallar el lado que en el polígono que se busca ha de ser homólogo al AB, hay que hallar el de un cuadrado que sea al construido sobre AB como m es á n. Por la construccion esplicada en el n.° **414**, podria resolverse este problema; pero es mas fácil imitar la del **415** ó **416**. Por consiguiente, se buscará una cuarta proporcional AG á las tres líneas n, m y AB; sobre la mayor de las dos AG ó AB se describirá una semi-circunferencia; en la estremidad de la menor de aquellas se levantará una perpendicular; se tirará la cuerda AI, y esta será el lado que se busca para el cuadrado. Rebatiéndola sobre AB en AB′, no habrá mas que construir sobre esta recta un polígono semejante al ABCDF. Para esto se dividirá el ABCDF en triángulos por medio de diagonales tiradas desde A, si es posible; luego se irán tirando sucesivamente las B′C′, paralela á BC; C′D′, paralela á CD; D′F′, á DF; y el polígono así formado resuelve el problema; porque, además de ser semejante al ABCDF (283), la razon de sus áreas es igual á la de $\overline{AB'}^2$ con $\overline{AB}^2$, y por lo tanto, á la de $\frac{AG}{AB}$, ó á la de $\frac{AM}{AN}=\frac{m}{n}$.

Problema XI.

420. *Dado un polígono* ABCDF, *construir otros cuatro que le sean semejantes, que tengan sus áreas proporcionales á cuatro rectas* m, n, p, q *dadas, y que su suma sea igual á la del* ABCDF (fig. 194).

Divídase uno cualquiera AB de los lados de este polígono en partes AM, MN, NP, PB proporcionales á las cuatro rectas dadas m, n, p, q; llévense las partes intermedias MN y NP desde A hasta N′ y P′

respectivamente; descríbase una semi-circunferencia sobre AB; levántense en los puntos M, N′, P′ y P las MB′, N′B″, P′B‴ y PB$^{\text{IV}}$ perpendiculares á la AB, y únase el punto A con los B′, B″, B‴, y B con B$^{\text{IV}}$. Estas cuerdas son los lados que en los polígonos que se buscan han de ser homólogos al AB; porque los cuadrados de estas cuerdas son proporcionales á sus proyecciones AM, AN′, AP′ y BP, y por lo tanto, á las líneas m, n, p, q; y siendo la suma de estas proyecciones la recta AB, la de sus cuadrados será $\overline{AB}^2$; luego las áreas de los cuatro polígonos serán proporcionales á las rectas m, n, p, q, y su suma la misma del ABCDF.

Problema XII.

421. *Transformar el polígono* ABCD *en otro que sea semejante al* FGIKL (fig. 195).

Para abreviar, designarémos por P y Q las áreas respectivas de los dos polígonos, y por x el lado que en el polígono que se busca ha de ser homólogo con el FG. Por ser aquel polígono semejante al FGIKL, se tendrá

$$\frac{Q}{P}=\frac{\overline{FG}^2}{x^2}.$$

Transformando los polígonos Q y P cada uno en un cuadrado, y llamando q y p á sus lados, la proporcion anterior se convertirá en

$$\frac{q^2}{p^2}=\frac{\overline{FG}^2}{x^2},$$

de la cual se saca

$$\frac{q}{p}=\frac{FG}{x}.$$

Por lo tanto, buscando una cuarta proporcional á las líneas conocidas q, p y FG, se hallará el lado que en el polígono que se busca ha de ser homólogo del FG, y con él será muy fácil construir dicho polígono.

422. Corolario. Este problema da el medio de *transformar un polígono irregular cualquiera en uno de los regulares que sabemos inscribir en la circunferencia;* pues basta construir primero un polígono regular que tenga el número de lados que se pide, y despues transformar el polígono irregular en otro semejante al nuevo.

PROBLEMA XIII.

423. *Dividir el trapecio* ABCD *en dos partes proporcionales á dos rectas dadas* p *y* q *por medio de una paralela á las bases* (fig. 196).

Supongamos que EF sea la paralela pedida, y que por consiguiente sea

$$\frac{AF}{EC}=\frac{p}{q};$$

de esta proporcion se saca

$$\frac{AF+EC}{AF} \quad \text{ó} \quad \frac{AC}{AF}=\frac{p+q}{p}.$$

En virtud de esto, prolongo los dos lados AD y BC hasta su encuentro en O, y entonces la semejanza de los dos triángulos OAB y OEF da la proporcion

$$\frac{OAB}{OEF}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{EF}^2},$$

de donde

$$\frac{OAB}{OAB-OEF} \quad \text{ó sea} \quad \frac{OAB}{AF}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AB}^2-\overline{EF}^2}.$$

Del mismo modo se tiene

$$\frac{OAB}{OAB-ODC} \quad \text{ó} \quad \frac{OAB}{AC}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AB}^2-\overline{DC}^2}.$$

Como las dos razones de esta proporcion y la precedente tienen los mismos numeradores, resulta

$$\frac{AC}{AF}=\frac{\overline{AB}^2-\overline{DC}^2}{\overline{AB}^2-\overline{EF}^2},$$

y por lo mismo

$$\frac{p+q}{p}=\frac{\overline{AB}^2-\overline{DC}^2}{\overline{AB}^2-\overline{EF}^2},$$

en cuya proporcion solo hay desconocida la EF.

Ahora bien; si con AB por diámetro se describe una semi-circunferencia, y desde A como centro se trazan con los radios DC y EF arcos que corten á aquella en G y en I, se tendrá

$$\overline{BG}^2=\overline{AB}^2-\overline{DC}^2 \quad \text{y} \quad \overline{BI}^2=\overline{AB}^2-\overline{EF}^2;$$

pero si se proyectan los puntos G é I en K y en L sobre el diámetro AB, tendrémos por la propiedad del número 395.

$$\frac{\overline{BG}^2}{\overline{BI}^2}=\frac{BK}{BL};$$

luego

$$\frac{p+q}{p}=\frac{BK}{BL}.$$

Así que BL es una cuarta proporcional á las líneas $p+q$, p y BK. Se la construirá, se levantará en L una perpendicular LI á la AB, y solo faltará tirar una paralela EF á la AB que sea igual á AI, lo que es fácil.

424. Escolio. Cuando se quiera dividir el trapecio por medio de paralelas á sus bases en partes equivalentes, por ejemplo, en cinco, se observará que, siendo AE igual á $\frac{1}{5}$, AE′ $=\frac{2}{5}$, AE″ $=\frac{3}{5}$..... de AD (fig. 197), no habrá mas que dividir BK en cinco partes iguales, levantar perpendiculares á esta recta por los puntos de division, y tirar luego paralelas á AB que sean respectivamente iguales á las cuerdas AI, AI′, AI″.....

Problema XIV.

425. *Construir un rectángulo equivalente á un cuadrado dado* m^2, *y en que la suma ó la diferencia de sus dos lados contiguos sea igual á una recta dada* a.

1.° La recta m ha de ser media proporcional entre las dos dimensiones del rectángulo que se pide, y como la suma de estas es a, puede considerarse que m es la perpendicular bajada desde un punto de la circunferencia sobre el diámetro, y que los dos lados contiguos del rectángulo son los segmentos de este diámetro, que será por consiguiente igual á a. Por lo tanto, sobre una recta OA$=a$ (fig. 198) descríbase una semi-circunferencia; levántese en O una perpendicular OM $=m$ al diámetro OA; trácese por su estremidad M una paralela MXX′ á OA; desde el punto X en que esta corte á la circunferencia se tirará una perpendicular BX al diámetro OA, y se determinarán así dos segmentos OB y BA, que serán las dos dimensiones del rectángulo buscado, porque se tiene que $\overline{BX}^2$ = OB . BA.

2.° La recta m debe ser media proporcional entre las dos dimensiones del rectángulo que se pide, y como la diferencia de las mismas ha de ser a, puede suponerse que m y el mayor de los lados del rectángulo son una tangente y una secante tiradas por un mismo punto, y que el menor de los lados del mismo rectángulo es la parte esterior de la secante, de modo que la cuerda que esta deje dentro de la circunferencia sea igual á a. Por consiguiente, en la estremidad M de una recta $OM = m$ (fig. 199) se levantará una perpendicular $MA = \frac{a}{2}$; desde A como centro, y con AM por radio, se describirá una circunferencia, y tirando por el centro A y el punto O una secante OAX, esta recta será el lado mayor del rectángulo que se pedia, y la parte esterior OX′ la menor. Efectivamente, vemos en primer lugar, que la diferencia de las dos rectas OX y OX es $XX' = a$, y que $\overline{OM}^2 = OX . OX'$ (256).

Problema XV.

426. *Dadas tres rectas* B′B″, BC *y* C′C″, *dispuestas de modo que la segunda corte á las otras dos, se quiere tirar otra* MN *paralela á* BC, *y tal que el área del trapecio* BN *sea igual á un cuadrado dado* m^2 (fig. 200).

Busco una tercera proporcional á las dos líneas $\frac{BC}{2}$ y m, y tiro una recta DK paralela á BC, que diste de esta una cantidad igual á la tercera proporcional, y es claro que el triángulo BDC es equivalente al cuadrado m^2.

Hecho esto, una vez que se supone que el trapecio BN es equivalente al triángulo BDC, lo serán tambien entre sí los triángulos MDC y MNC; luego DN es paralela á MC, y como MN lo es ya á BC, se podrá establecer la siguiente série de razones iguales:

$$\frac{BC}{MN} = \frac{AC}{AN} = \frac{AM}{AD} = \frac{MN}{DK}.$$

Por consiguiente, se hallará MN tomando una media proporcional entre BC y DK, y solo faltará inscribir entre B′B″ y C′C″ una recta que sea igual á esta media proporcional y paralela á BC.

427. Problemas para resolver. 1.° *En un cuadrado dado inscribir otro cuyo lado sea igual á una recta dada* m.

2.° *Dados un círculo y una recta indefinida, tirar por la estremidad de un diámetro, perpendicular á esta, una secante tal, que la* *parte comprendida entre el círculo y la recta sea igual á otra dada* m.

3.° *Hallar en lo interior de un triángulo un punto tal, que, unido con los tres vértices, las áreas de los triángulos resultantes sean proporcionales á tres rectas dadas.*

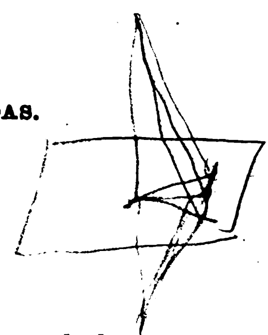
4.° *Hallar el lugar geométrico de todos los puntos de un plano que se hallen igualmente iluminados por dos luces cuya posicion se conoce, y cuyas intensidades son proporcionales á dos rectas* p *y* q; *sabiendo además que las intensidades de una misma luz á diferentes distancias son recíprocamente proporcionales á los cuadrados de las distancias á que se halle colocada.*

5.° *Por dos puntos dados en una circunferencia tirar dos cuerdas paralelas, de modo que el trapecio á que sirven de bases sea equivalente á un cuadrado dado.*

6.° *Dadas dos circunferencias concéntricas y un diámetro comun á ellas, tirar en la mayor una cuerda que forme con este diámetro un ángulo dado, y que quede dividida por la circunferencia menor en partes proporcionales á otras rectas conocidas.*

LIBRO SESTO.

SUPERFICIES PLANAS INDEFINIDAS.



CAPÍTULO PRIMERO.

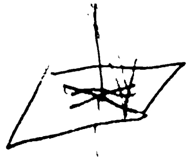
PLANOS Y RECTAS.

428. Ya hemos visto que la posicion de un plano queda determinada por la condicion de que pase por tres puntos que no estén en línea recta, ó por dos rectas que se corten; pero tambien lo está cuando tenga que pasar por dos rectas paralelas: así, pues,

Teorema I.

Dos rectas paralelas determinan un plano.

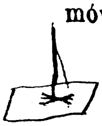
En efecto, siempre se podrá hacer pasar un plano por dos rectas de esta especie, porque en virtud de la definicion del núm. 63, dos líneas de esta clase se hallan en un mismo plano; además, ~~solo~~ po-



drá pasar uno, pues de lo contrario, tomando en una de ellas dos puntos y otro en la otra, habria dos planos diferentes, que pasarian por estos tres puntos que no estaban en línea recta, lo que es absurdo.

429. Corolario I. *Por un punto* A *dado en el espacio solo se puede tirar una paralela á una recta dada* BC (fig. 201). Porque si por A y la recta BC se hace pasar un plano MN, podrá en este y por el mismo punto A trazarse una paralela AD á esta recta; pero si pudiéramos tirar otra AF, el plano que determinasen las dos paralelas AF y BC coincidiria con el MN (18); luego por A, y en un mismo plano, habria dos paralelas AF y AD á una misma recta BC, lo que es imposible (65).

430. Corolario II. *Cuando una recta* AB *resbala sobre otra* CB *permaneciendo siempre paralela á sí misma, engendra un plano;* pues si no, por cada punto de CB se podrian tirar dos paralelas á AB, una trazada en el plano ABC, y la otra que seria la posicion de la recta móvil en este punto.



Teorema II.

431. *Si una recta* AO *es perpendicular á otras dos* BC *y* DF, *trazadas por su pié* [1] *en el plano* MN (fig. 202), *lo será á cualquiera otra* GI *tirada por dicho punto en este plano* [2].

Tómense dos puntos cualesquiera B y D en los lados del ángulo BOD, en que está trazada la recta OG, y uniéndolos por la BD, esta cortará á IG en G. Prolonguemos AO una cantidad OA′=OA, y unamos los puntos A y A′ sucesivamente con cada uno de los B, G y D. Siendo la recta OB perpendicular á la AA′, en su punto medio, las distancias BA y BA′ serán iguales (56); por la misma razon AD=A′D; luego los triángulos ABD y A′BD son iguales (189), y por lo tanto, el ángulo ABD igual á su homólogo A′BD, y los triángulos ABG y A′BG iguales entre sí (181); por consiguiente, el lado AG lo es á su homólogo A′G. Así es que, si por O, punto medio de AA′, se levanta *en el plano* AGA′ una perpendicular á esta recta, pasará por el punto G (60); luego tendrá con la OG dos puntos comunes,

---

[1] Esto es, por el punto en que la AO atraviesa el plano.

[2] Es evidente que se puede admitir esta hipótesis; porque haciendo pasar un plano por AO, se puede en él trazar una perpendicular á esta recta en el punto O, y luego, haciendo pasar otro por la misma AO, repetir la construccion. Ya no habrá mas sino hacer pasar un plano por estas dos perpendiculares, y se tendrá el MN.

y coincidirá con ella; por consiguiente, OG es perpendicular á AA'.

432. *Llámase* PERPENDICULAR Á UN PLANO *la recta que lo es á todas las que se puedan trazar por su pié en este plano*, y recíprocamente, *este plano se llama* PERPENDICULAR Á LA RECTA.

433. Del teorema que precede se deduce que *para asegurarse de que una recta es perpendicular á un plano, basta averiguar si lo es á dos de las que pasan por su pié en el mismo.*

434. *Todo plano* que sea *perpendicular á la vertical de un punto se llama horizontal:* tal lo será el que se haga pasar por dos rectas perpendiculares á la *vertical* en un mismo punto, ó sea por dos *horizontales*. Para poner un plano en tal posicion sirve el *nivel* de albañil, que consiste en tres reglas BD, BF y AC (fig. 203), que forman un triángulo rectángulo isósceles ABC, de cuyo vértice B se hace bajar una plomada BP. Los dos brazos BD y BF son iguales, de modo que la recta DF que una sus estremos será paralela á AC (426). Por consiguiente, si se coloca el nivel sobre un plano horizontal, en cuyo caso el hilo de la plomada será perpendicular á DF, este mismo hilo deberá pasar exactamente sobre una *línea de fé* trazada en direccion de la perpendicular que se baje desde B sobre AC, que ha de pasar por el medio de AC. Recíprocamente, cuando la plomada tome esta direccion será perpendicular á DF, de modo que esta recta será horizontal. Así, pues, si colocando el nivel en dos posiciones, próximamente perpendicular la una á la otra para mayor exactitud, se satisface á esta condicion, el plano estará horizontal.

TEOREMA III.

435. *Si tres rectas* BO, GO *y* DO *son perpendiculares á otra* AA' *en un mismo punto* O (fig. 202), *estas tres rectas se hallarán en un mismo plano perpendicular á la* AA'.

Voy á demostrar que tirando un plano por las dos primeras rectas BO y GO, la tercera DO tiene que hallarse en el mismo. Tiremos, en efecto, uno por las rectas AA' y DO; la AA' será perpendicular á su *traza* (1) sobre el plano BOG (431); luego esta traza coincidirá con DO que ya es perpendicular á AA' en el punto O, y en el plano AOD (51); por consiguiente, DO está en el BOG perpendicular á AA'; luego, etc.

---

(1) La interseccion de un plano con otro, ó con una recta, se llama la traza del plano ó de la recta sobre el primero.

436. Corolario. *El lugar geométrico de todas las perpendiculares levantadas á una recta en un mismo punto, es un plano perpendicular á esta recta.*

Teorema IV.

437. *Por un punto dado puede siempre tirarse una perpendicular á un plano, pero nada mas que una.*

Pueden ocurrir dos casos; ó que el punto dado esté en el mismo plano, ó que se halle fuera.

1.er caso. Sea O el punto situado en el plano MN (fig. 204); tiro una recta cualquiera BC, á la cual bajo desde O la perpendicular OD; por el pié D de esta, otra perpendicular DA á la BC, y digo, que si en O y en el plano ODA levanto una OA perpendicular á OD, esta OA será tambien perpendicular al plano MN. Para demostrarlo, prolongo la OA en una cantidad OA′=OA; tomo un punto C, cualquiera de los de BC, y le uno con A, con O y con A′, y por último, tiro la DA′. Por ser DO perpendicular en la mitad de AA′, será DA′=AD; pero tambien BC es perpendicular á las dos rectas DA y DO, y por lo mismo á su plano y á la A′D: luego los triángulos rectángulos ADC y A′DC tienen un ángulo igual comprendido entre dos lados respectivamente iguales; por consiguiente AC=A′C; OC será perpendicular á AA′ (61); y siendolo esta recta á las OD y OC que pasan por su pié en el plano MN, lo será al mismo plano.

2.° caso. Supongamos que el punto dado sea A, situado fuera del plano MN. Bajo AD perpendicular sobre una recta cualquiera BC, trazada en este plano; por su pié D, y en el plano dado MN, levanto la DO perpendicular á BC, y digo que la perpendicular AO que desde A se baje sobre OD, lo será tambien al plano MN.

(No hay mas que repetir la demostracion precedente).

No cabe duda de que por un mismo punto solo se puede tirar una perpendicular á un plano MN; porque si fuese posible tirar dos, la traza del que pasase por ellas sobre el MN seria perpendicular á ambas (431); lo cual es absurdo (51).

438. *Se llama* oblícua *á un plano toda recta que le encuentra sin ser perpendicular á él.*

Teorema V.

439. *Si una perpendicular* OA (fig. 205), *y diferentes oblícuas* AB, AC, AD *á un plano* MN, *salen de un mismo punto* A, *se verifica:*

1.º que la perpendicular AO *es mas corta que cualquiera oblícua; 2.º que las oblícuas* AB *y* AC, *cuyos piés se apartan igualmente de la perpendicular, son iguales; 3.º que de dos oblícuas* AC *y* AD, *es mayor la* AD, *cuyo pié se aparta mas del de la perpendicular.*

1.º La perpendicular OA es menor que la oblícua AB, en virtud del teorema del núm. 51.

2.º Las oblícuas AB y AC son iguales, por ser hipotenusas de dos triángulos rectángulos iguales AOB y AOC (181).

3.º La oblícua AD es mayor que la AC; porque tomando OC′=OC, y uniendo A con C′, esta AC′ será igual á AC; pero una vez que por hipótesis OD>OC, la AD>AC′, es decir, que AC.

440. Corolario I. Recíprocamente, *si dos oblícuas á un plano parten de un mismo punto, y son iguales, sus piés distarán igualmente del de la perpendicular bajada desde este punto al plano; y si son desiguales, el pié de la mas larga distará mas del de la perpendicular.*

441. Corolario II. *La distancia de un punto á un plano tiene por medida la perpendicular bajada desde este punto al plano.*

Teorema VI.

442. *Si desde el pié de una perpendicular* AO *al plano* MN (fig. 204), *se baja una perpendicular* OD *á una recta* BC *trazada en este plano, y se une el pié de esta segunda perpendicular con un punto* A *cualquiera de los de la primera, la recta* AD *que los una será perpendicular á la* BC *que habia en el plano.*

Sobre BC tomarémos las dos distancias iguales BD y DC, y unirémos los puntos A y O con los B y C, con lo que tendrémos evidentemente que OB=OC (56), y por lo tanto, AB=AC (439); luego, si por el punto D y en el plano BAC levantamos una perpendicular á BC, irá á pasar por A, coincidirá con AD, y esta será precisamente la perpendicular.

443. Escolio. Las dos rectas BC y AO no se encontrarian jamás, y, sin embargo, no son paralelas; porque para que lo fuesen, era preciso que se hallasen en un mismo plano (63), el cual coincidiria entonces con MN, de modo que AO se hallaria toda en este, lo que no es así. Por consiguiente, *de que dos rectas no se encuentren en el espacio, no puede deducirse que sean paralelas.*

TEOREMA VII.

444. *Dos perpendiculares* AB *y* CD *á un mismo plano* MN *son paralelas* (fig. 206).

En efecto, las dos rectas AB y CD son perpendiculares á la BD que une sus piés, y solo falta probar que están en un mismo plano. Para esto levanto sobre BD en D y en el plano MN la perpendicular FG; uno A con D, y la AD será perpendicular á FG (**442**); pero CD lo es tambien (**432**), y como las BD, AD y CD se hallan en un mismo plano (**435**), y AB se halla en él (**16**), queda demostrado el teorema.

TEOREMA VIII.

445. Recíprocamente, *si dos rectas* AB *y* CD *son paralelas, y una de ellas* AB *es perpendicular á un plano* MN, *la otra* CD *tambien lo será.*

En efecto, si no lo fuese, por uno de los puntos de CD se podria tirar una perpendicular al plano MN, la cual tendria que ser paralela á AB, y habria por un mismo punto dos paralelas á una misma recta AB, lo que es imposible (**429**).

446. COROLARIO I. *Dos rectas paralelas á una tercera en el espacio son paralelas entre sí;* pues si se tira un plano perpendicular á esta tercera, lo será tambien á las otras dos (**445**), que serán, por lo tanto, paralelas (**444**).

447. COROLARIO II. *Si dos rectas* AB, CD (fig. 207) *son paralelas, y se hace pasar por ellas dos planos* AE *y* CE *que se corten, su interseccion comun* FE *será paralela á estas rectas.*

Con efecto, si por un punto cualquiera de los de FE se tira una paralela á AB, tambien lo será á CD, por lo que deberá hallarse á la vez en los dos planos AE y CE (**429**); luego coincidirá con su interseccion FE.

448. ESCOLIO. Observemos que cada una de las dos rectas AB y CD es *paralela* á cualquiera plano que pase por la otra, es decir, que no le puede encontrar; porque, hallándose estas rectas en el plano ABCD, la AB, por ejemplo, no podrá encontrar á un plano tirado por CD sin encontrar á la interseccion de este plano con ABCD, esto es, á CD, lo que no puede ser: de modo que *toda recta que sea paralela á otra trazada en un plano, lo es al plano.*

449. *Se llama* PROYECCION *de un* PUNTO *sobre un plano, el pié de la* *perpendicular bajada desde el punto al plano.* Esta proyeccion es única (437).

450. *Se llama proyeccion de una* LÍNEA *sobre un plano el lugar de los pies de todas las perpendiculares bajadas desde los diferentes puntos de esta línea sobre el plano.* A este se denomina EL PLANO DE PROYECCION.

451. Síguese de esta definicion, que *la proyeccion de una línea recta sobre un plano es otra recta*; porque el lugar geométrico de todas las perpendiculares bajadas desde sus diferentes puntos sobre el plano es otro plano (444 y 430). Pero dos puntos bastan para determinar una recta; luego bastará para tener la proyeccion de una recta, unir las de dos cualesquiera de sus puntos, ó mejor aun, si la recta que se proyecta encuentra al plano, unir su traza sobre el plano dado con la proyeccion de uno cualquiera de sus puntos.

452. *Se llama* PLANO PROYECTANTE *de una recta el lugar de las perpendiculares bajadas desde sus diferentes puntos al de proyeccion.*

Teorema IX.

453. *Dos planos* MN, PQ (fig. 208), *perpendiculares á una misma recta* AB, *son paralelos*; es decir, que no pueden encontrarse.

En efecto, si se pudieran encontrar juntando cualquiera punto O de su interseccion con las trazas de la recta AB sobre estos planos, las OA y OB estarian todas ellas en los respectivos MN y PQ, y serian, por consiguiente, perpendiculares á AB, lo que es imposible.

Teorema X.

454. *Las intersecciones de dos planos paralelos por un tercero son rectas paralelas.*

Estas intersecciones no pueden encontrarse, porque cada una se halla en uno de los dos planos paralelos; están además en un mismo plano; luego son paralelas.

Teorema XI.

455. *Si dos planos* MN, PQ (fig. 208) *son paralelos, toda perpendicular* AB *levantada sobre uno de ellos* MN, *lo es tambien al otro* PQ.

En primer lugar, la recta AB encontrará al plano PQ; porque si por un punto cualquiera G de PQ y por la recta AB se hace pasar un plano, sus trazas CD y FG sobre el MN y el PQ serán paralelas; luego AB, que encuentra á la primera, tambien cortará á la segunda (65), y por lo tanto, al plano PQ; además, AB será perpendicular á FG, porque lo es por suposicion á CD; luego, siendo perpendicular á *toda* recta tirada por su pié en el plano PQ, lo será á este mismo (432).

456. Escolio. Una vez que toda recta que encuentre al plano MN, encuentra tambien al paralelo á este PQ, se ve que todas las paralelas que se pueden tirar al plano PQ por un punto cualquiera de MN, están situadas en este último plano. Por lo que, *el lugar de todas las paralelas que se pueden tirar por un punto dado á un mismo plano, es otro paralelo á este.*

457. Corolario. *Por un punto dado solo se puede tirar un plano paralelo á otro.*

Teorema XII.

458. *Las partes* AB, GD (fig. 208) *de dos paralelas comprendidas entre dos planos paralelos* MN, PQ, *son iguales.*

Porque tirando un plano por estas dos paralelas, sus trazas AD y BG sobre los dos planos serán paralelas (454); luego AB=GD (197).

459. Corolario I. *Dos planos paralelos están equidistantes en toda su estension*; porque las perpendiculares bajadas desde dos puntos cualesquiera del uno sobre el otro, son paralelas (444), y por consiguiente, iguales.

460. Corolario II. *Las paralelas comprendidas entre una recta y un plano paralelo á esta, son iguales.*

Teorema XIII.

461. *Si dos ángulos* B *y* B′ (fig. 209) *tienen sus lados paralelos:* 1.° *sus planos tambien lo serán*; 2.° *dichos ángulos serán iguales, si los lados paralelos están dirigidos en el mismo sentido ó en sentidos contrarios;* 3.° *serán suplementarios, si dos lados paralelos van en el mismo sentido, y los otros dos en contrario.*

1.° Si por el punto B tiramos un plano paralelo á A′B′C′, su traza sobre el ABB′A′ será paralela á B′A′ (454), y coincidirá, por consiguiente, con BA (65); por la misma razon su traza sobre el plano CBC′B′ coincidirá con BC; luego este plano, conteniendo las dos

rectas CA y BC, se confundirá con el ABC (19); luego ABC es paralelo á A′B′C′.

2.° Supongamos que los ángulos B y B′ tengan sus lados dirigidos en el mismo sentido. Tomemos BA = B′A′, BC = B′C′; unamos A con C, A′ con C′, B con B′, A con A′ y C con C′. Las rectas AA′ y CC′ son iguales y paralelas á BB′ (201), y por lo mismo iguales y paralelas entre sí; luego el cuadrilátero AC′ es un paralelógramo, y AC = A′C′; por consiguiente, los triángulos ABC y A′B′C′ son equiláteros entre sí; luego sus ángulos homólogos B y B′ son iguales.

Los otros dos casos se demuestran como en los n.os 72 y 73.

462. Corolario. *Si dos rectas son paralelas, sus proyecciones sobre un mismo plano tambien lo son* (454).

La recíproca no es verdadera; solamente puede deducirse que *si las proyecciones de dos rectas sobre un mismo plano son paralelas, sus planos proyectantes tambien lo serán;* porque están determinados por estas proyecciones y por las perpendiculares levantadas por un punto de cada una de ellas sobre el plano de proyeccion.

Vemos por esto que *dos rectas serán paralelas cuando lo sean sus proyecciones sobre dos planos que se corten;* porque los dos planos proyectantes de la una son paralelos á los de la otra; y es evidente que si dos planos paralelos están cortados por otros dos tambien paralelos, las cuatro rectas que resultan de sus intersecciones son paralelas; y de estas cuatro intersecciones, dos son las rectas propuestas.

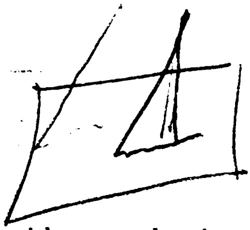
463. Escolio. El teorema del n.° 253 es cierto para dos ángulos situados en el espacio.

Teorema XIV.

464. *Tres planos paralelos* MN, PQ, RS (fig. 210) *cortan á dos rectas cualesquiera* AC, A′C′ *en partes proporcionales*, es decir, que se tendrá la proporcion

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}.$$

Para demostrarlo, tiro por el punto A una paralela AE á A′C′, y es claro que las partes AD y DE de esta serán respectivamente iguales á A′B′ y B′C′ (458). Pero si se hace pasar un plano por AC y AE, sus trazas BD y CE, sobre los PQ y RS, serán paralelas, y se tendrá, por consiguiente,



$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DE},$$

ó lo que es lo mismo,

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}.$$

465. Escolio. La recíproca de esta proposicion no es cierta; porque dos puntos no bastan para determinar un plano; sin embargo, por los puntos homólogos A y A', B y B', C y C' no se puede hacer pasar mas que un solo sistema de tres planos que sean paralelos. Tiremos, efectivamente, por el punto A una paralela á A'C', y tomemos sobre ella las partes AD=A'B', y DE=B'C': las tres rectas AA', DB' y EC' serán paralelas (201), y tambien las BD y CE, porque dividen á AC y AE en partes proporcionales. Luego el plano BDB' será paralelo al CEC' (461), y al que pasará por AA' y la paralela AF á BD. Mas bien se ve que no hay mas que este sistema de tres planos paralelos que pueda pasar por los puntos A y A', B y B', C y C'; porque el plano medio, debiendo cortar á AE en la misma razon que AC y que A'C', pasa necesariamente por el punto D, y coincide así con BDB'.

466. Corolario I. *Dos planos paralelos cortan en partes proporcionales á un sistema de rectas bajadas desde un mismo punto.*

467. Corolario II. *Dividiendo en partes proporcionales varias rectas bajadas todas de un punto y terminadas en un mismo plano, los puntos de division se hallarán todos en otro plano paralelo á este.*

Problema I.

468. *Tirar por un punto dado una perpendicular á un plano dado* MN.

Hay que considerar dos casos, segun que el punto se halle fuera del plano MN ó en él.

1.er caso. Sea A el punto que se da fuera del plano MN (fig. 205); repítase la construccion indicada en el segundo caso del n.° 437, ó mas bien, márquense en el plano MN tres puntos B, C, D equidistantes de A, y únase este último punto con el centro del círculo determinado por los B, C, D (440).

Si el plano MN es horizontal, se dejará caer desde A una plomada, la que determinará sobre este plano el pié de la perpendicular pedida [1].

2.° CASO. Sea O el punto dado sobre el plano MN (fig. 204); repítase la construccion indicada en el primer caso del núm. 437, ó bien por el punto O tírese una paralela á cualquiera perpendicular bajada sobre el plano MN.

PROBLEMA II.

469. *Desde un punto dado* A *bajar una perpendicular á una recta* BC *situada en el plano* MN (fig. 204).

Bájese desde A una perpendicular AO sobre el plano MN, despues otra desde O á BC, y únase el pié D de esta con el punto A (442).

PROBLEMA III.

470. *Hallar la menor distancia entre dos rectas* AB *y* CD (fig. 211), *no situadas en un mismo plano.*

La menor distancia entre las rectas AB y CD es evidentemente otra recta (8); es además perpendicular á las dos AB y CD; pues si fuera oblícua á una de ellas, á la AB por ejemplo, seria mayor que la perpendicular bajada sobre AB desde el punto en que aquella oblícua cortase á CD, lo que no se puede suponer. Así, pues, se trata de tirar una perpendicular comun á las dos rectas AB y CD.

Para esto, tiro por un punto cualquiera de CD una paralela CF á AB, y desde otro cualquiera B de esta bajo la perpendicular BG al plano del ángulo FCD; por el punto G tiro GI paralela á CF, que lo será tambien á AB, y por el punto I la IK paralela á BG. Esta IK es perpendicular á las dos AB y CD, porque lo es al plano FCD como paralela á BG (445); luego es perpendicular á CD, á IG, y, por consiguiente, á AB.

Digo tambien que el problema no admite mas que una solucion. Efectivamente, toda perpendicular comun á AB y á CD lo será al plano FCD, por serlo á CD y á la paralela á AB que se tire en este plano por el pié de CD; luego se hallará en el plano ABGI, que es el lugar de todas las perpendiculares bajadas desde los diferentes puntos de AB sobre el plano FCD (452); por consiguiente, deberá en-

---

[1] Este es un método práctico tan sencillo como poco exacto. (*Nota del Traductor*).

contrar á CD en el punto I, y coincidir con KI (51); luego esta es la única perpendicular que se puede tirar á la vez sobre AB y sobre CD.

471. Escolio. Las dos rectas AB y CD, que no se encuentran, tienen, sin embargo, una respecto de otra cierta *inclinacion*, que se mide por el ángulo que forman entre sí dos paralelas tiradas á cada una de estas dos rectas por un mismo punto del espacio, ó mas sencillamente, por el ángulo que forma una de ellas con la paralela á la otra tirada por uno de sus puntos. Así es que el ángulo FCD mide la inclinacion de las rectas AB y CD.

472. Es evidente que la *inclinacion* de una recta AB sobre un plano MN (fig. 212) debe medirse por el menor de los ángulos que aquella forme con las diferentes rectas que se pueden tirar en el plano por el punto en que le atraviesa; y digo que este ángulo *mínimo* es el mismo que forma la recta de que se trata con su proyeccion sobre el plano. Con efecto, para tener la proyeccion de AB sobre MN, bajo desde uno cualquiera de sus puntos una perpendicular AO sobre este plano, y uno B con O (451); y hecho esto supongo que BC sea una recta cualquiera tirada en el plano MN por el punto B. Tomo BC = BO, uno el punto A con el C, y los triángulos ABO y ABC tendrán comun el lado AB, el BO = BC y el tercer lado AO del primero menor que el tercero AC del segundo; luego el ángulo ABO tendrá que ser menor que ABC (187); por consiguiente,

La inclinacion de una recta sobre un plano tiene por medida el ángulo que esta forma con su proyeccion sobre el mismo plano.

473. Problemas para resolver. 1.° *¿Cuál es el lugar de todos los puntos equidistantes de dos dados?*

2.° *¿Cuál es el lugar de todos los puntos equidistantes de una circunferencia dada?*

3.° *Demostrar que todo plano paralelo á dos lados opuestos de un cuadrilátero* gaucho [1] *corta á los otros dos en partes proporcionales; y que, recíprocamente, toda recta que corta en partes proporcionales á dos lados opuestos de un cuadrilátero gaucho, se hallan en un plano paralelo á los otros dos lados.*

4.° *Probar que dos rectas paralelas se hallan igualmente inclinadas sobre un mismo plano.*

---

[1] Así se llama un cuadrilátero cuyos cuatro lados no están en un mismo plano.

CAPÍTULO II.

ÁNGULOS DIEDROS Y POLIEDROS.

474. *Se llama* ÁNGULO DIEDRO *la parte indefinida del espacio, comprendida entre dos planos que se cortan; y que terminan en la recta interseccion de ambos.* Esta recta se llama la *arista* del ángulo diedro, y los dos planos que comprenden á este son las *caras* (1). En virtud de esta definicion BC es la arista del ángulo diedro ABCD, y los planos AC y BD sus caras (fig. 213). Un ángulo diedro se nombra, como lo acabamos de hacer, por medio de *cuatro* letras, de las que las dos estremas indican puntos cualesquiera de sus caras, y las del medio son las de la arista. Tambien se nómbra algunas veces un ángulo diedro nada mas que con las dos letras colocadas en su arista; pero es preciso para esto que en la misma no concurran otros diedros. Por esto puede muy bien llamarse (fig. 213) ángulo diedro BC al formado por los dos planos AC y BD.

Puede suponerse que, coincidiendo los dos planos en un principio, uno de ellos ha girado alrededor de la recta BC, y engendrado así un ángulo diedro, cuya magnitud dependerá únicamente de la separacion de los dos planos.

475. Tirando por un punto G, cualquiera de los de la arista BC, perpendiculares GF y GI á esta arista en cada una de las caras, se formará un ángulo FGI, que se llama *el rectilíneo correspondiente al diedro* BC, y que es el mismo, cualquiera que sea la posicion del vértice G sobre la arista. Efectivamente, se ve que, repitiendo igual construccion en cualquiera otro punto L de la arista, el ángulo KLO

(1) Me parece muy acertada la modificacion que el profesor *Sr. D. Federico Saavedra* hace de esta definicion y de las que de ella se deducen, y que son en los términos siguientes:

Se llama ÁNGULO DIEDRO *la inclinacion mútua de dos planos que se cortan y terminan en una recta que se llama la* ARISTA *de dicho ángulo. Cada uno de los dos planos se llama* CARA *del ángulo diedro.*

Se dice que *dos ángulos diedros son iguales cuando es posible colocarlos de modo que coincidiendo la arista y una de las caras, tambien coincidan las otras dos caras.*

Se dice que *un ángulo diedro* A *es mayor que otro* B *cuando, colocados de modo que coincidan las dos aristas y una cara de* A *con una de* B*, la otra de* B *queda entre la otra de* A *y las dos confundidas de* A *y* B. *(Nota del Traductor).*

será igual á FGI, porque ambos tendrán sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido.

TEOREMA I.

476. *Dos ángulos diedros* BC *y* B'C' (fig. 213) *son iguales, cuando lo son sus rectilíneos correspondientes* FGI *y* F'G'I'.

En efecto, los dos ángulos iguales FGI y F'G'I' pueden superponerse de manera que coincidan perfectamente, y entonces las aristas BC y B'C', que son respectivamente perpendiculares á los planos de estos ángulos (433), coincidirán (437), y estando las dos rectas F'G' y B'C' colocadas sobre FG y BC, el plano A'C' se confundirá con el AC, y lo mismo dirémos del B'D' con respecto al BD: por consiguiente, los dos ángulos diedros BC y B'C' coincidirán, por lo que serán iguales.

TEOREMA II.

477. Recíprocamente, *si dos ángulos diedros* BC *y* B'C' (fig. 213) *son iguales, sus ángulos rectilíneos correspondientes* FGI *y* F'G'I' *tambien lo serán.*

Puede colocarse estos dos ángulos diedros de modo que se cubran perfectamente, y que el punto G' esté sobre el G: en este caso las perpendiculares F'G' y FG á las aristas B'C' y BC coincidirán, lo mismo que las rectas G'I' y GI; de modo que el ángulo F'G'I' se confundirá con FGI: luego estos ángulos son iguales.

478. *Un plano* AB *es* PERPENDICULAR *á otro* MN *cuando forma con este dos ángulos diedros adyacentes iguales* ACBM *y* ABCN (fig. 214); *y se dice en este caso que los ángulos diedros son rectos.*

TEOREMA III.

479. *El ángulo rectilíneo correspondiente á un ángulo diedro recto es tambien recto.*

Porque si por el punto G (fig. 214) se tiran en los planos MN y AB las perpendiculares IK y FG á la arista BC, los ángulos rectilíneos FGI y FGK, correspondientes á los diedros iguales ACBM y ABCN, tambien serán iguales, y por lo mismo rectos.

Teorema IV.

480. Recíprocamente, *si el ángulo rectilíneo* FGI (fig. 214), *correspondiente al diedro* ACBM, *es recto, este diedro tambien lo es.*

El ángulo FGK, adyacente á FGI, será recto; luego los dos diedros ACBM y ABCN, que les corresponden, serán iguales, y por consiguiente rectos.

481. Corolario. *Todo plano* AB *que pasa por una perpendicular* FG *á otro* MN, *es perpendicular á este.*

Teorema V.

482. *Si dos planos* AB *y* MN (fig. 214) *son perpendiculares entre sí, y en el primero se baja una perpendicular* FG *á su interseccion* BC, *esta perpendicular lo será tambien al segundo plano.*

Levántese en el plano MN la GK perpendicular á la interseccion BC, el ángulo FGK será el rectilíneo correspondiente al diedro ABCN, y recto por consiguiente; luego siendo la FG perpendicular á las dos rectas BC y GK, trazadas por su pié en el plano MN, lo será á este.

Teorema VI.

483. Recíprocamente, *si dos planos* AB *y* MN (fig. 214) *son perpendiculares entre sí, y por un punto* G *cualquiera de los de su interseccion se levanta una perpendicnlar* GF *al segundo, esta se hallará en el primero.*

Con efecto, tirando por el punto G en el primer plano AB una perpendicular á la interseccion BC, lo será al segundo plano MN (482); luego coincidirá con GF (437); por lo tanto, FG se halla situada en el primer plano AB.

Teorema VII.

484. *Si dos planos* AB *y* CD (fig. 214), *que se cortan, son perpendiculares á un tercero* MN, *su comun interseccion* FG *tambien lo será.*

Porque levantando por el punto G, comun á los tres planos, una perpendicular al plano MN, deberá estar á la vez en los dos AB y CD (483) y será su misma interseccion FG.

TEOREMA VIII.

485. *Si una recta* AB *es perpendicular á un plano* PQ (fig. 215), *la proyeccion* BA′ *de ella sobre cualquier plano* MN *es perpendicular á la traza* QR *del plano* PQ *sobre el de proyeccion* MN.

Porque siendo la AB perpendicular al plano dado PQ, su proyectante ABA′ lo es á este (481), y lo es además al de proyeccion MN (452). Por lo tanto, el plano dado PQ y el de proyeccion MN, por ser perpendiculares al proyectante de la recta, tendrán su comun interseccion, esto es, la traza QR del plano dado, perpendicular al proyectante ABA′ (484), y á la proyeccion BA′ de la recta, que es una línea trazada en este plano.

486. ESCOLIO. La recíproca no es verdadera; solo se puede decir que *si la proyeccion* BA′ *de una recta sobre un plano* MN *es perpendicular á la traza* QR *de un plano dado con este, el proyectante de la recta es perpendicular al plano dado*. Efectivamente, esta traza QR es perpendicular al plano proyectante de la recta (482); luego el que se dió es perpendicular al proyectante (481).

De aquí se deduce que, *cuando las proyecciones de una recta sobre dos planos que se cortan son perpendiculares á las trazas de un tercer plano sobre estos de proyeccion, la recta es perpendicular á dicho tercer plano;* pues los dos que proyectan á la recta, por ser perpendiculares á este, tienen tambien perpendicular al mismo su comun interseccion; es decir, la recta de que se trata.

TEOREMA IX.

487. *Dos ángulos diedros* ABCD *y* EFGH *son proporcionales á sus rectilíneos correspondientes* IKL *y* MNO (fig. 216).

Dos casos se pueden presentar: ó que los ángulos IKL y MNO sean comensurables, ó que no lo sean.

1.° *Suponiendo que los ángulos* IKL *y* MNO *sean comensurables*, y que esté contenida su comun medida cinco veces en el primero y tres en el segundo, la razon entre los dos ángulos será la de $\frac{5}{3}$. Haciendo pasar planos por las rectas de division y las aristas BC y FG, quedarán los ángulos diedros ABCD y EFGH divididos respectivamente en 5 y en 3 partes iguales; y como las del primero lo son á las del segundo (476) (por serlo las subdivisiones de los ángulos IKL y MNO), se ve que la razon de ABCD á EFGH es tambien la de $\frac{I}{M}$; luego

$$\frac{ABCD}{EFGH}=\frac{IKL}{MNO}.$$

2.° *Suponiendo que los ángulos* IKL *y* MNO *sean incomensurables* (fig. 217). Divídase el MNO en cualquier número de partes iguales, y aplíquese una de estas sobre IKL tantas veces como se pueda; y sea LKQ el resíduo que se llegue á encontrar; hágase pasar un plano por la recta KQ y la arista BC, y como los ángulos IKQ y MNO son comensurables, etc.

Teorema X.

488. *Todo ángulo diedro tiene por medida el ángulo rectilíneo correspondiente.*

Medir un ángulo diedro, es buscar la relacion que existe entre este ángulo diedro y otro tomado por unidad. Así, pues, si A es el que hay que medir, y D la unidad de ángulo diedro, la medida de A será la razon que exista entre A y D. Pero acabamos de ver que dos ángulos diedros son proporcionales á sus rectilíneos correspondientes; luego si B y C representan estos rectilíneos, la razon $\frac{A}{D}$ será la misma que $\frac{B}{C}$; y por lo tanto, esta última será la medida de A. Mas si *convenimos* en tomar el ángulo C por unidad para los rectilíneos, la razon $\frac{B}{C}$ será la medida del B; luego esta será tambien la del diedro A. Por consiguiente, *un ángulo diedro tiene por medida su ángulo rectilíneo correspondiente* [1], dando á este enunciado la significacion que hemos esplicado en el n.° 111. Vemos, por lo tanto, que, tomando respectivamente por unidades el ángulo diedro recto y el rectilíneo tambien recto, la medida de un diedro podrá espresarse en grados, minutos y segundos.

---

[1] Quizás se pregunte si un ángulo diedro puede tener por medida un ángulo rectilíneo diferente del formado por dos perpendiculares tiradas á la arista en un mismo punto, y una en cada cara. Si fuera posible, seria necesario lo primero que los dos lados de este ángulo estuviesen igualmente inclinados sobre la arista; porque debiendo variar en la misma relacion el ángulo diedro y el rectilíneo que le sirve de medida, se necesita que el segundo se haga nulo al mismo tiempo que el primero. Entendido esto, consideremos

489. Escolio. Comparando los enunciados de los teoremas 106, 107, 109 y 110 con los de las proposiciones 476, 477 y 488, verémos que el ángulo rectilíneo correspondiente á uno diedro, es, respecto de este, lo que es respecto de un ángulo rectilíneo el arco comprendido entre sus lados, y descrito desde su vértice como centro.

Obsérvese tambien que, siendo en el espacio los ángulos diedros lo que son los ángulos rectilíneos sobre un plano en que se hallan trazados, puede deducirse que, *cuando dos planos se cortan, los ángulos diedros adyacentes valen juntos dos ángulos diedros rectos; y que los opuestos por la arista son iguales;* que, *si dos planos paralelos están cortados por otro, los ángulos diedros alternos-internos, ó alternos-esternos, ó correspondientes, son iguales*, etc. Para demostrarlo, bastaria tirar un plano perpendicular á la arista de uno de los ángulos diedros que se comparan.

Sin embargo, hay que observar que *las recíprocas de estas últimas proposiciones no son ciertas, sino en tanto que los diedros de que se trate tengan sus aristas paralelas;* porque dos planos que no son paralelos, pueden muy bien formar ángulos iguales con un tercero.

490. *Se llama* Ángulo poliedro *la porcion indefinida del espacio que queda comprendida entre varios planos que pasan por un mismo punto, y que terminan en sus comunes intersecciones* (fig. 218). Este

---

los tres ángulos diedros ABCQ, QBCD y ABCD (fig. 217), y supongamos que habiendo trazado en sus caras las rectas KI, KQ y KL, se hayan tenido las proporciones,

$$\frac{ABCQ}{ABCD}=\frac{IKQ}{IKL} \qquad \frac{QBCD}{ABCD}=\frac{LKQ}{IKL};$$

de las que se saca

$$\frac{ABCQ+QBCD}{ABCD}=\frac{IKQ+LKQ}{IKL}.$$

Pero $ABCQ+QBCD=ABCD$; luego

$$IKL=IKQ+LKQ;$$

lo que exige que las tres rectas KI, KQ y KL estén en el mismo plano, porque si no podria considerárselas como las aristas de un ángulo triedro, y por consiguiente, se tendria (**496**) $IKL<IKQ+LKQ$. Ahora pues, si se toman las tres distancias iguales KI, KQ y KL, y se une B con I, con Q y con L, las líneas BI, BQ y BL serán tres oblicuas iguales tiradas desde B sobre el plano KIQL, porque los triángulos BKI, BKQ y BKL tienen un ángulo igual comprendido entre lados que lo son: luego la perpendicular bajada desde B sobre este plano caerá en K, y coincidirá con BK. De consiguiente, para que el ángulo IKL pudiera servir de medida al ángulo diedro ABCD, es necesario que sus lados sean perpendiculares á la arista del diedro.

punto es el *vértice* del ángulo poliedro, las intersecciones de los planos son las *aristas*, y los ángulos planos que cada una de estas forma con la siguiente, las *caras*. Así, S es el vértice del ángulo poliedro SABCDE; las rectas SA, SB, SC, SD, SE son las aristas, y los ángulos ASB, BSC, CSD, DSE, ESA las caras. Un ángulo poliedro se designa con la letra del vértice, seguida de las que esten respectivamente colocadas sobre un punto de cada arista. Muchas veces tambien se le nombra solamente con la letra del vértice, mas es necesario para esto que no concurran en él otros ángulos poliedros. En la fig. 218, puede muy bien llamarse ángulo S al SABCDE.

491. Cuando una recta, de cualquiera manera que se la trace, no puede cortar la superficie de un ángulo poliedro mas que en dos puntos, se llama al ángulo *convexo*, ó se dice que *tiene los ángulos diedros salientes*; en el caso contrario se le llama *cóncavo*, ó bien se espresa *que sus ángulos diedros son entrantes*. El ángulo S de la figura 218 es convexo, y el T de la 219 es cóncavo. Los ángulos diedros salientes de este último son: TA, TB, TD, TE, TF, TG; no hay en todo él mas ángulo diedro entrante que el TC, y este vale cuatro ángulos diedros rectos, menos el ángulo diedro BTCD, que presenta su abertura á la parte de afuera.

492. Cuando hablemos de un ángulo poliedro, siempre se entenderá que nos referimos á uno convexo, á menos que no se advierta lo contrario.

493. Los ángulos poliedros se distinguen por el número de sus caras, ó de sus ángulos diedros; y los nombres que se les ha dado designan perfectamente el número de aquellas ó de estos: así, se llama

ángulo triedro, ó simplemente *triedro*, al que tiene 3 caras,
— *tetráedro*, al que tiene........................ 4
— *pentáedro*.. 5
— *exáedro*... 6
etc. etc.

Nótese que *el triedro es el mas sencillo de los ángulos poliedros*, y que se puede dividir un ángulo poliedro cualquiera en triedros, como se divide un polígono en triángulos.

TEOREMA XI.

494. *Si desde un punto* S′, *tomado en lo* INTERIOR *de un triedro* S (fig. 220), *se bajan sobre las caras* ASB, ASC *y* BSC *las perpendiculares respectivas* S′C′, S′B′ *y* S′A′, *y por cada dos de estas se hace pasar un plano, se formará un segundo triedro* S′, *y los dos* S *y* S′ *tendrán las siguientes propiedades* : 1.° *las aristas de cada uno serán perpendiculares á las caras del otro ;* 2.° *las caras de cada uno serán los suplementos de los ángulos diedros del otro.*

1.° Vemos que la arista SA, por ejemplo, es perpendicular á la B′S′C′, cuyas aristas se supone que tambien lo son á las caras ASB y ASC adyacentes á SA; porque el plano B′S′C′ es á un mismo tiempo perpendicular á los ASB y ASC (481), y por lo tanto, á su comun seccion SA (484).

2.° Digo que *el ángulo diedro* C′S′B′A′, *cuya arista* S′B′ *es perpendicular al plano de la cara* ASC, *tiene esta misma por suplemento.* Efectivamente, siendo esta arista perpendicular á las trazas AB′ y B′C de las caras C′S′B′ y A′S′B′ sobre el plano ASC, el ángulo AB′C es el rectilíneo correspondiente al diedro S′B′; mas la suma de los ángulos del cuadrilátero convexo SAB′C (pues ha podido escogerse el punto S′ de tal modo, que las perpendiculares bajadas desde este punto caigan sobre las caras de S, y no sobre sus prolongaciones) vale cuatro rectos; y como ya lo son los A y C por ser las aristas SA y SE perpendiculares á las caras B′S′C′ y B′S′A′, resulta que los ángulos ASC y AB′C son suplementarios.

495. ESCOLIO. Los dos triedros S y S′ se llaman *suplementarios* el uno del otro, porque cada cara de uno es el suplemento del ángulo diedro del otro cuya arista sea perpendicular al plano de esta cara.

Observemos que tambien son suplementarios estos triedros, cualquiera que sea la posicion del vértice S′, cuando las aristas de este último estuviesen dirigidas en un mismo sentido con relacion á las caras del triedro S; porque podria mirarse este ángulo S′ como si fuese el triedro suplementario de S, que se le hubiera trasladado en el espacio (499).

TEOREMA XII.

496. *Una cara cualquiera de un triedro es menor que la suma de las otras dos y mayor que su diferencia* (fig. 221).

1.° Sea ASC la mayor de las tres caras; voy á demostrar que ASC$<$ASB$+$BSC.

Trácese para esto en el plano de la cara ASC la recta SD, que forme con SC un ángulo DSC$=$BSC; tírese la recta AC desde un punto cualquiera de SA á otro tambien cualquiera de SC, y esta recta cortará á la SD en un punto D: tómese SB$=$SD y únase B con A y con C. Siendo el triángulo BSC igual al DSC, será DC$=$BC, y por ser la recta AC menor que la quebrada ABC, si quitamos de la primera DC, y de la segunda su igual BC, quedará AD$<$AB. El lado SA es comun á los dos triángulos ASD y ASB, y SD$=$SB; luego el ángulo ASD, opuesto al lado AD, es menor que el ASB, opuesto al lado correspondiente AB: así, pues, añadiendo al primero el ángulo DSC y al segundo el igual BSC, se tendrá ASD$+$DSC, ó sea ASC$<$ASB$+$BSC, como se queria demostrar.

2.° La segunda parte del teorema es una consecuencia necesaria de la primera.

Teorema XIII.

497. *La suma de las caras de todo ángulo poliedro* CONVEXO S *es menor que cuatro rectos* (fig. 218).

Córtese el ángulo poliedro propuesto S por un plano que encuentre á todas las aristas [1], y sea ABCDE el polígono formado por las trazas de este plano secante sobre las caras de S. Tómese en lo interior de este polígono un punto cualquiera O, y únasele con todos los vértices A, B, C, D, E. De este modo habrémos formado alrededor de este punto tantos triángulos como haya alrededor de S, de manera que la suma de los ángulos de los unos será igual á la de los otros; por consiguiente, en demostrando que la suma de los ángulos de la base de los primeros triángulos es menor que la de los ángulos de la base de los segundos, deducirémos forzosamente que la suma de los que hay alrededor del vértice S, será por compensacion

---

[1] Esto será siempre posible. En efecto, prolonguemos los planos de dos caras no adyacentes hasta que se corten, y así formarémos un diedro en que quedará comprendido el ángulo poliedro; porque, á causa de ser convexo, ninguno de los planos de sus caras puede encontrar á su superficie. Si tiramos, pues, por la arista de este ángulo diedro un plano que sea esterior á él, todas las aristas del ángulo S quedarán situadas á un mismo lado de este plano, de suerte que, si se hace pasar otro paralelo á este por un punto de una de las aristas, cortará á todas las demás.

menor que la de los formados alrededor del vértice O; y como esta vale cuatro rectos, quedará demostrado el teorema.

Pues bien; en el punto A tenemos un tríedro formado por los planos SAE, EAB y BAS; luego, en virtud del teorema precedente, el ángulo EAB, esto es, $EAO+OAB$, es menor que $SAE+SAB$. Del mismo modo veríamos que $ABO+OBC<SBA+SBC$, y así sucesivamente; luego la suma de los ángulos que hay en la base de todos los triángulos cuyo vértice está en O, es menor que la de aquellos que le tienen en S. Por lo tanto, la suma de las caras de todo ángulo poliedro convexo es menor que cuatro ángulos rectos.

Esta demostracion exige precisamente que el ángulo S sea convexo; porque si el diedro SB, por ejemplo, fuese entrante, en vez de tener $ABO+OBC<SBA+SBC$, se tendria $4-(ABO+OBC)<SBA+SBC$, y entonces no seria cierto el teorema.

Teorema XIV.

498. *La suma de los ángulos diedros de un triedro cualquiera es mayor que* DOS *rectos y menor que* SEIS.

Para demostrarlo, construirémos el triedro S′ suplementario del propuesto S. La suma de los ángulos diedros de este, aumentada con la de las caras del otro, valdrá *seis* rectos; luego la suma de los ángulos diedros no llega á seis rectos. Por otra parte, la suma de las caras de S′ es menor que cuatro rectos; por consiguiente, la de los ángulos diedros de S es mayor que dos rectos, porque reunidas las dos sumas componen seis.

Teorema XV.

499. *Cuando dos triedros* S *y* S′ (fig. 223) *tienen sus caras iguales respectivamente*, á saber: $ASC=A'S'C'$, $ASB=A'S'B'$ y $BSC=B'S'C'$ *serán tambien iguales sus ángulos diedros homólogos;* es decir, los opuestos á caras iguales.

Tomemos sobre las aristas de estos dos triedros seis distancias iguales SA, SB, SC, S′A′, S′B′, S′C′, y tiremos las AB, AC, BC, A′B′, A′C′, B′C′. Así se formarán seis triángulos *isósceles* respectivamente iguales (181); luego $AB=A'B'$, $BC=B'C'$ y $AC=A'C'$, de lo que se deduce que los triángulos ABC y A′B′C′ son iguales, y tambien, por consecuencia, sus ángulos homólogos. Entendido esto, para demostrar que el ángulo diedro SA, por ejemplo, es igual al S′A′, tiro por cualquier punto E de su arista un plano GEF perpendicular á ella, y las trazas de este plano sobre los de las caras ASB y ASC formarán el ángulo rectilíneo correspondiente al diedro SA. Tomo en seguida A'E' = AE, y tiro igualmente por E' un plano G'E'F' perpendicular á S'A'. Se trata de probar que el ángulo GEF = G'E'F', y para conseguirlo, observo que, siendo los lados de estos ángulos respectivamente perpendiculares á SA y S'A', necesariamente encontrarán á AB y AC en F y en G, y á A'B' y A'C' en F' y G' (64): trazo, pues, los FG y F'G', y formo de este modo dos triángulos EFG y E'F'G', que son iguales (189). Efectivamente, lo son los EAG y E'A'G' (183); luego EG=E'G' y AG=A'G'. Por una razon semejante será EF=E'F' y AF = A'F'; por consiguiente, los triángulos AFG y A'F'G' que tienen un ángulo igual comprendido entre lados respectivamente iguales, dan FG = F'G', y por lo mismo, el ángulo FEG = F'E'G'.

Teorema XVI.

500. *Dos triedros son iguales cuando tienen sus caras iguales una á una y* SEMEJANTEMENTE DISPUESTAS (1) (fig. 223).

Llevemos, con efecto, el triedro S' sobre el S, colocando la cara A'S'B' sobre su igual ASB, de modo que coincidan sus aristas homólogas. Entonces el plano de la cara A'S'C' caerá sobre el de ASC, porque son iguales los dos ángulos diedros SA y S'A' (499), y estando semejantemente dispuestas las caras homólogas, las aristas SC y S'C' deben hallarse á un mismo lado del plano comun ASB; mas el ángulo A'S'C' = ASC; luego la arista S'C' seguirá la direccion de SC, y las caras B'S'C' y BSC coincidirán necesariamente.

501. Escolio I. Si las caras homólogas no estuviesen semejantemente dispuestas, sucederia que al superponer las A'S'B' y ASB, colocando S'A' sobre SA y S'B' sobre SB, las aristas S'C' y SC se hallarian á distinto lado del plano ASB, de suerte que no tendria lugar la coincidencia de los dos triedros. Aun cuando se quisiera dar vuelta al S' y colocar S'A' sobre SB y S'B' sobre SA, para que las dos aristas S'C' y SC caigan á un mismo lado del plano ASB, siempre seria imposible que coincidiesen los triedros S y S', aunque tienen todos sus elementos iguales, porque en este caso el diedro S'A'

(1) Esto es, que si se colocan una sobre otra dos caras iguales y hacemos coincidir sus aristas homólogas, las otras dos aristas quedan situadas á un mismo lado de la cara comun.

corresponderia al SB, y estos dos son desiguales, lo mismo que las caras A′S′C′ y BSC. Se dice entonces que los dos triedros son *simétricos*. Así es que *llamarémos* TRIEDROS SIMÉTRICOS *á los que tengan todas sus partes constituyentes iguales una por una, pero dispuestas en un órden* INVERSO.

Dado un triedro, inmediatamente se puede tener uno simétrico con él, prolongando las aristas del primero y tomando por caras los ángulos planos opuestos por el vértice á los del que se nos dió. Vemos, efectivamente, que si se hace dar una media vuelta al ángulo B′SA′ en su plano y alrededor del vértice S (fig. 224), los lados SA′ y SB′ vendrán á colocarse respectivamente sobre SA y SB, mas las aristas SC′ y SC quedarán á distinto lado del plano comun.

Sea SC″ la posicion que ocupe entonces la SC′: digo que SC y SC″ se hallan situadas en un plano perpendicular á ASB, y que están igualmente inclinadas sobre ASB. En efecto, tomemos SC″=SC, unamos C con C″, y no habrá mas que demostrar que el plano ASB es perpendicular en el medio de CC″ (481 y 472). Para conseguirlo, uno los puntos C y C″ con dos cualesquiera A y B de las aristas SA y SB, y quedarán formados los triángulos CSA y CSB respectivamente iguales á los C″SA y C″SB (181), los que dan CA=C″A y CB=C″B; luego uniendo el medio O de CC″ con los puntos S, A, B, las tres rectas SO, AO y BO serán perpendiculares á CC″ (61), y determinarán, por consiguiente, un plano perpendicular á CC″ en su punto medio (435). Pero este plano es el mismo ASB; luego, etc.

Esto nos manifiesta que los dos triedros SABC y SABC″ están *simétricamente* colocados á distinto lado del plano ASB, y esta es la razon por la que Legendre los ha llamado *ángulos triedros simétricos* [1].

Se comprende fácilmente que dos ángulos poliedros cualesquiera, ya sean cóncavos ó convexos S y S′ (fig. 218), pueden tener todas sus caras consecutivas iguales una á una, á saber: ASB=A′S′B′, BSC=B′S′C′, CSD=C′S′D′, etc., pero colocadas en el uno en un órden inverso al que guardan en el otro, y los ángulos diedros homólogos (esto es, los comprendidos entre caras iguales) SA y S′A′, SB y S′B′, SC y S′C′, etc., iguales. En este caso, colocando la cara

[1] Se dice que dos puntos son simétricos respecto de una recta ó de un plano, cuando aquella ó este son perpendiculares en mitad de la recta que los une. Cuando dos cuerpos son tales que todos los puntos del uno son simétricos del otro, se dice que son simétricos. Un objeto y su imágen lo son.

A'S'B', por ejemplo, sobre su igual ASB, haciendo que coincidan las aristas homólogas, todas las demás del ángulo S quedarán á distinto lado del plano comun ASB que sus homólogas del S', de modo que estos dos ángulos poliedros no podrán coincidir, aunque son iguales sus elementos. Por esto dirémos tambien que son simétricos.

502. Escolio II. En las figuras planas no hay, propiamente hablando, igualdad por simetría; porque, como dice muy bien Legendre, todas las que quisieran llamarse así, serian igualdades absolutas ó de superposicion. En efecto, bajando desde todos los vértices de un polígono ABCDE (fig. 225) perpendiculares á una recta cualquiera XY, trazada en su plano, prolongando cada una de ellas hasta una cantidad igual á sí misma, y uniendo dos á dos sus estremos, se formará un polígono A'B'C'D'E', cuyos lados y ángulos serán todos respectivamente iguales á los del ABCDE, y colocados en un órden inverso. Sin embargo, para superponer el segundo polígono al primero, bastará doblar la figura á lo largo de XY: por lo tanto, estos polígonos son realmente simétricos respecto á la recta XY, que por esta causa se llama su *eje de simetría;* mas no lo son en el sentido que hemos dado á la palabra simétricos, al hablar de los triedros SABC y SABC'' (fig. 224); y esto consiste en que se puede tomar indiferentemente la parte de encima de una figura plana por la de abajo, y *vice-versa*, lo que no puede hacerse con las figuras que reunen las tres dimensiones de la estension.

Teorema XVII.

503. *Dos triedros* S *y* S' *son iguales cuando lo son los ángulos diedros del uno á los del otro, y sus caras homólogas están semejantemente dispuestas.*

En efecto, construyendo los dos triedros T y T' suplementarios de los S y S', tendrán sus caras homólogas iguales una por una (494), y por lo tanto, sus diedros homólogos iguales de la misma manera; luego los triedros S y S' tendrán iguales sus caras homólogas, y como, por hipótesis, se hallan semejantemente dispuestas, los triedros serán iguales.

Teorema XVIII.

504. *Dos triedros son iguales, cuando tienen igual un ángulo diedro comprendido entre dos caras del uno iguales respectivamente á las del otro, y semejantemente colocadas.*

Repítase la demostracion del núm. 500.

Teorema XIX.

505. *Dos triedros son iguales cuando tienen igual una cara adyacente á dos ángulos diedros iguales uno por uno los del primero á los del segundo, y semejantemente colocadas las caras homólogas.*

La demostracion es análoga á la del núm. 500.

506. Escolio. Si los elementos cuya igualdad constituye la de los dos triedros estuviesen dispuestos en un órden inverso, los triedros serian simétricos; pues bien se comprende que construyendo el simétrico del primero de ellos, seria igual al segundo en virtud de alguno de los tres últimos teoremas.

Teorema XX.

507. *Para que se pueda construir un ángulo triedro con tres ángulos planos dados, es necesario y suficiente que la suma de estos sea menor que cuatro rectos; y que el mayor sea menor que la suma de los otros dos.*

Estas condiciones son necesarias, en vista de los teoremas 496 y 497; por lo tanto, solo probarémos que son suficientes.

Tracemos sobre un plano tres ángulos C′SA, ASB y C″SB iguales á los tres dados (fig. 226), y supongamos que el mayor sea ASB. Con un radio arbitrario, y haciendo centro en S, describo el arco C′A′B′C″; y el arco A′B′ será mayor que cada uno de los C′A′ y C″B′, y menor que su suma, por lo cual, bajando desde C′ y C″ las perpendiculares C′AM y C″BN sobre SA y SB respectivamente, quedará el punto M situado entre A′ y B′, y el N entre A′ y M, de modo que las cuerdas C′M y C″N se cortarán en lo interior de la circunferencia; luego C′A > AO. Por consiguiente, si en O se levanta una perpendicular OC al plano ASB, y en el que determinan esta y la AO, se describe un arco de círculo desde el centro A con el radio AC′, este arco cortará á la perpendicular en un punto C, y digo que haciendo pasar planos por este punto y por las rectas SA y SB, se formará un ángulo triedro SABC, cuyas caras serán precisamente iguales á los tres ángulos dados. En efecto, los triángulos SAC y SAC′ tienen un ángulo igual comprendido entre dos lados respectivamente iguales, porque CA es perpendicular á SA (442); luego el ángulo ASC es igual á ASC′, y SC = SC′ = SC″. De aquí se deduce que los triángulos rectángulos SBC y SBC″ tienen iguales las hipotenusas y uno de sus catetos, y por consiguiente, el ángulo CSB=C''SB', lo que acaba de demostrar la proposicion.

Teorema XXI.

508. *Dos triedros simétricos* S *y* S' *son equivalentes.*

Tomemos, en efecto, sobre las aristas del triedro S (fig. 222) las tres distancias iguales SA, SB y SC; tiremos un plano por los tres puntos A, B y C; y bajemos sobre este plano la perpendicular SO, que irá á caer en el centro del círculo que pasase por estos tres puntos (468, 1.°). Conduzcamos planos por esta recta y cada una de las tres aristas SA, SB, SC; tomemos en seguida S'A'=SA, y ejecutemos sobre el triedro S' la misma construccion que sobre S. Hecho esto, los triángulos SAC y S'A'C' serán iguales (181); luego AC=A'C'. Por la misma razon AB=A'B', y BC=B'C'; luego los triángulos ABC y A'B'C' son superponibles, y por consecuencia, los radios AO y A'O' de las circunferencias ABC y A'B'C' serán iguales (80); así los triángulos isósceles AOC y A'O'C' son equiláteros entre sí, y se los podrá superponer colocando el punto A' sobre el C, y el C' sobre el A; por lo tanto, la perpendicular S'O' al plano A'B'C' tomará la direccion SO (437), y como ambas son iguales, porque los triángulos rectángulos SAO y S'A'O' tienen iguales las hipotenusas y un cateto, el punto S' caerá en S; así, el triedro S'O'A'C' coincidirá perfectamente con SOAC. Del mismo modo se demostraria que los triedros SOAB y S'O'A'B', SOBC y S'O'B'C' son iguales. Pues bien; estando el triedro S' compuesto de los triedros S'O'A'C', S'O'A'B' y S'O'B'C', del mismo modo que el S lo está de los SOAC, SOAB y SOBC, debe concluirse que los dos triedros son equivalentes.

Teorema XXII.

509. *Un ángulo triedro tiene por medida el esceso de la suma de sus tres ángulos diedros sobre dos rectos.*

Tomarémos por unidad el *triedro trirectángulo*, cuyos tres ángulos diedros son rectos. Pero siendo este la mitad del ángulo diedro recto [1], tomándole por unidad, las medidas de los diedros SA, SB y SC

---

[1] Llamo la atencion de mis comprofesores sobre esta idea del autor, que, en mi concepto, es algo violenta, tanto por comparar cantidades heterogéneas como son los ángulos diedros con los poliedros, como por comparar espacios ilimitados. *(Nota del T.)*

serán respectivamente 2A, 2B y 2C (fig. 224). Sentado esto, prolonguemos las tres aristas del triedro S en las cantidades SA′, SB′ y SC′, y verémos inmediatamente que la suma de los dos triedros SCBA y SCBA′ compone el diedro CAA′B; por lo cual

$$S+SCBA'=2A;$$

é igualmente

$$S+SCAB'=2B.$$

La suma de los dos triedros SCA′B′ y SC′A′B′ forma el diedro A′CC′B′; mas el segundo es equivalente á su simétrico S (501 y 508), luego

$$S+SCA'B'=2C.$$

Sumando ahora estas tres igualdades, se hallará que la de sus primeros miembros se compone de dos veces el triedro S, y de los otros cuatro SCBA′, SCAB′, SCA′B′ y S, que por componer todo el espacio situado encima del plano ABA′B′ y alrededor de su vértice comun S, valen cuatro triedros trirectángulos, ó sean *cuatro unidades;* luego se tendrá

$$2+4=2A+2B+2C;$$

ó dividiendo por 2, y restando dos unidades de cada miembro

$$S=A+B+C-2.$$

Así, pues, *un triedro tiene por medida el esceso de la suma de sus tres ángulos diedros sobre dos rectos*, es decir, la razon entre el esceso de la suma de estos diedros sobre dos rectos y el ángulo recto, porque puede considerarse al número *abstracto* 2 como espresando la razon de dos rectos á uno.

TEOREMA XXIII.

510. *Todo ángulo poliedro tiene por medida la suma de sus ángulos diedros, disminuida de tantas veces dos rectos como caras tiene menos dos.*

1.° Supongamos en primer lugar que el ángulo poliedro que se nos propone sea convexo. Haciendo pasar planos por una cualquiera de sus aristas y por las de todos los diedros no adyacentes á esta, se dividirá el ángulo poliedro en tantos triedros como caras tenga, menos dos (218, 1.°); luego su medida será igual á la suma de todos los diedros de estos triedros, menos tantas veces dos rectos como caras haya menos dos; pero la suma de los ángulos de todos los triedros es evidentemente igual á la de los diedros del ángulo propuesto; luego *un ángulo poliedro convexo tiene por medida la suma de sus ángulos diedros, disminuida de tantas veces dos rectos como caras tiene menos dos.*

*2.° Si fuera cóncavo el ángulo poliedro, se le encerraria con facilidad en uno convexo, haciendo pasar planos por las aristas de las caras que formen los ángulos entrantes (218, 2.°); y rebajando en seguida del nuevo ángulo poliedro cada uno de los triedros con que se haya aumentado al primitivo, se tendrá este último. Así, en la figura 219 se ha hecho pasar un plano por las dos aristas TB y TD; luego, para tener la medida del ángulo T, habrá que disminuir la del TABDEFG en tanto como valga la del triedro TBCD, es decir, en

$$\mathrm{DTBC}+\mathrm{BTDC}+\mathrm{BTCD}-2=\mathrm{DTBC}+\mathrm{BTDC}-\mathrm{C}+2;$$

porque el ángulo BTCD es igual á cuatro rectos menos el entrante C. Pero $\mathrm{ABTD}-\mathrm{DTBC}=\mathrm{B}$, y $\mathrm{BTDE}-\mathrm{BTDC}=\mathrm{D}$; luego *la medida del ángulo poliedro primitivo será igual á la suma de sus ángulos,* disminuida de tantas veces dos rectos como caras haya menos dos en el ángulo TBADEFG, menos dos rectos, es decir, *disminuida de tantas veces dos rectos como caras tiene menos dos.*

Como podria evidentemente aplicarse este razonamiento á cada uno de los ángulos entrantes del ángulo poliedro propuesto, queda demostrado el teorema en todos sus casos.

511. Un triedro se compone de seis elementos, á saber: tres caras y tres diedros. Mas adelante (*Geom. descr.*) verémos que, dados *tres* de estos *seis* elementos, se pueden determinar los otros tres.

512. TEOREMAS PARA SU DEMOSTRACION [1]: 1.° *El lugar de todos los puntos equidistantes de dos planos dados, es el sistema de dos planos que dividen en partes iguales á los ángulos diedros formados por los que se dieron.*

2.° *El lugar de todos los puntos equidistantes de las tres caras de un ángulo triedro es la recta en que se cortan los planos que dividen en dos partes iguales á cada uno de los tres ángulos diedros.*

---

[1] En la primera edicion francesa de esta obra habia, además de los que trae la presente, el que sigue:
Dos planos perpendiculares á un tercero, y que pasan por dos rectas paralelas entre sí y oblicuas respecto á este, son paralelos. (*Nota del T.*).

3.° *En un triedro* ISOEDRO (así se llama el que tiene dos caras iguales) *los ángulos diedros opuestos á las caras iguales lo son; y recíprocamente, si dos ángulos diedros de un triedro son iguales, las caras opuestas á ellos tambien lo son.*

4.° *En todo triedro, el mayor ángulo diedro se opone á la mayor cara; y recíprocamente, la mayor cara está opuesta al mayor ángulo diedro.*

LIBRO SÉTIMO.

SUPERFICIES CURVAS.

CAPÍTULO PRIMERO.

DIFERENTES ESPECIES DE SUPERFICIES CURVAS, Y SUS PROPIEDADES GENERALES.

513. Cuando una *línea* se mueve en el espacio, puede suceder, ó que conserve su forma al cambiar de posicion, ó que á un mismo tiempo varíe de forma y de posicion; y bien se comprende que en ambos casos, esta línea engendrará en su movimiento una superficie; porque es claro que el *lugar* de todas sus posiciones sucesivas dividirá al espacio en dos partes, á las cuales servirá de *límite.* Así es que la superficie engendrada depende de las leyes que arreglen para cada uno de los instantes del movimiento la forma de la línea móvil, que se llama la *generatriz* de la superficie, y su posicion en el espacio.

Vemos, pues, que *toda superficie puede considerarse como engendrada por el movimiento de una línea de forma constante ó variable en el espacio*, y que estará completamente determinada cuando se pueda construir para un punto cualquiera la generatriz con la forma y en la posicion que deba tener al pasar por este punto. Por lo general se determinan las posiciones sucesivas de la generatriz sujetándola á moverse sobre una ó varias líneas fijas que se llaman las *directrices.*

Así hemos visto que podia engendrarse un plano haciendo resbalar una recta paralelamente á sí misma á lo largo de otra (430). La primera seria la generatriz, y la segunda la directriz, siendo aquella en este caso de forma constante.

Haciendo girar una línea *cualquiera* CMD (fig. 227) alrededor de una recta fija AB, se engendra una superficie que se llama *de revolucion*, y en la que la forma de la generatriz es tambien constante. Pero si observamos que en el movimiento de esta curva las perpendiculares bajadas desde sus diferentes puntos sobre el *eje de revolucion* AB describen circunferencias que tienen por centros los puntos en que aquellas cortan al eje, se comprenderá que puede muy bien mirarse esta superficie como engendrada por una circunferencia que se moviera de tal suerte, que, hallándose siempre su centro sobre la recta AB, y siendo su plano constantemente perpendicular á esta recta, tuviese un radio igual en cada momento á la distancia que haya entre los puntos en que su plano corta á las dos líneas AB y CMD dadas en el espacio. En este caso la curva generatriz cambia al mismo tiempo de forma y de posicion.

514. Haciendo estensiva á una curva cualquiera la definicion que hemos dado de la tangente á una circunferencia (84), *se llamará* TANGENTE *á una curva, en un punto dado, el límite hácia el cual tiende la direccion de una secante, cuando se la hace girar alrededor de aquel punto, hasta que el segundo de interseccion venga á coincidir con el primero.*

De aquí se sigue que se puede considerar á la tangente como una recta que pasa por dos puntos infinitamente próximos sobre la curva, ó que tiene un elemento comun con ella.

Teorema I.

515. *Todas las tangentes á las diferentes curvas que se puedan trazar sobre una superficie por uno de sus puntos, se hallan en un mismo plano, que por esta causa se llama el* PLANO TANGENTE *á la superficie en este punto.*

Efectivamente, sea M un punto cualquiera de una superficie (figura 228), AB la forma y la posicion de la generatriz al pasar por este punto, CD una directriz de AB, y GF otra curva *cualquiera* trazada en esta superficie por el punto M. Claro es que, probando que la tangente á esta última curva en el punto M está en el plano determinado por las tangentes tiradas á las otras dos AB y CD en el mismo punto, quedará el teorema demostrado.

Para conseguirlo, consideremos á la generatriz en otra posicion

A'B', y sean M' y N' los puntos en que corta á CD y á FG. Por los M, M' y N' tomados dos á dos, tiremos las secantes MM' MN' y M'N' que evidentemente se hallarán en un mismo plano. Suponiendo ahora que la generatriz A'B' resbala sobre CD aproximándose á AB, arrastrará en su movimiento á las tres secantes, cuyo plano girará al mismo tiempo alrededor de M. Por último, cuando la generatriz haya vuelto á la posicion AB, los puntos M' y N' coincidirán con M, y las tres secantes móviles habrán venido á ser tangentes respectivas á las tres curvas CD, GF y AB. Mas en cada posicion de la generatriz estas tres secantes estaban siempre en un mismo plano; luego debemos deducir que cuando se hayan convertido en tangentes, deben todavía hallarse en un mismo plano, el cual será el límite de las posiciones sucesivas del que contenia las tres secantes.

516. Como dos rectas que se cortan bastan para determinar un plano, se ve que *para tirar uno tangente á una superficie en un punto dado, bastará construir las tangentes á dos líneas trazadas sobre la superficie por aquel punto, y hacer pasar un plano por estas dos rectas.*

517. Del teorema precedente se deduce que el plano tangente á una superficie puede considerarse que tiene comun con ella un elemento superficial, formado por la reunion de todos los elementos lineales que son comunes á las curvas que pasan por el punto de contacto y á sus tangentes. Puede, por lo mismo, ser considerada una superficie curva como compuesta de una infinidad de facetas planas, infinitamente pequeñas, que se llaman sus elementos.

Verdad es que así se sustituye á la superficie propuesta otra *poliedral*, cuyas caras son infinitamente pequeñas; pero toda propiedad que en semejantes superficies fuese cierta independientemente de la magnitud de sus caras y de la mútua inclinacion de estas, subsistiria cuando el número de aquellas se hiciera mayor y su tamaño cada vez menor, de modo que la propiedad de que se trata se verificará igualmente cuando se pase al límite de dicha superficie, esto es, cuando se llegue á la propuesta.

518. Las superficies empleadas con mas frecuencia en las artes, son aquellas que tienen por generatrices la línea recta y la circunferencia. Entre estas últimas, se distingue especialmente la producida por el movimiento de una línea cualquiera girando alrededor de un eje fijo, la cual hemos llamado *superficie de revolucion*. Todos los planos perpendiculares al eje la cortan en circunferencias cuyos centros se hallan sobre el eje, que generalmente son desiguales, y se llaman *los paralelos*. Los planos que pasan por el eje la cortan

segun curvas que se llaman *meridianos*, y que son todos iguales entre sí. En efecto, sean CMD y CM'D (fig. 227) dos meridianos cualesquiera, y MQ y M'Q, NR y N'R, PS y P'S,..... las trazas de sus planos sobre otros varios paralelos. Los ángulos MQM', NRN', PSP'.... serán iguales, porque corresponden á un mismo diedro MCDM', y como MQ = M'Q, NR = N'R, PS = P'S..... vemos que haciendo girar al plano CN'D una cantidad angular MQM', todos los puntos M', N', P'..... vendrán á rebatirse respectivamente sobre M, N, P,.... de modo que la curva CM'D cubrirá exactamente á la CMD.

*519. El plano tangente á una superficie de revolucion es perpendicular al del meridiano sobre el que se halla situado el punto de contacto. Con efecto, la tangente tirada por este punto al paralelo sobre el que se halla, es perpendicular á la interseccion de este paralelo y del meridiano (85); y como estos dos planos son perpendiculares entre sí, aquella lo será al del meridiano (482); luego el plano tangente tambien será perpendicular á este (481).

*520. Hay dos especies de superficies engendradas por una línea recta: las *alabeadas* y las *desarrollables*. Unas y otras se comprenden en la denominacion comun de *superficies regladas*, porque puede aplicarse sobre ellas la arista de una regla.

*521. El carácter distintivo de las superficies alabeadas es que dos generatrices consecutivas nunca se hallan en un mismo plano, de modo que el elemento (516) de la superficie que se halla comprendido entre estas dos rectas, no es plano. Es un elemento curvo ilimitado en la direccion de las rectas que le comprenden.

Fácilmente se satisface á esta condicion; porque puede engendrarse una superficie alabeada, haciendo que una recta resbale sobre otras tres, que tomadas dos á dos nunca sean paralelas á un mismo plano; ó tambien haciendo moverse á una recta paralelamente á un plano fijo, de modo que se apoye constantemente sobre otras dos situadas en planos diferentes, y de las cuales ninguna sea paralela al plano fijo.

Una ú otra de estas condiciones bastan para arreglar el movimiento de la generatriz; porque en el primer caso, si se toma un punto M cualquiera de la directriz A (fig. 229), y por él y cada una de las otras directrices B y C se hacen pasar planos, su interseccion MN cortará á las dos rectas B y C; porque si fuese paralela á ambas, todo plano que lo fuese al AMN lo seria á las tres directrices, lo que es contra la hipótesis. Recíprocamente, toda recta que, estando tirada por el punto M, encuentre á las B y C, se hallará en los dos planos, y coincidirá, por consiguiente, con MN.

Para construir en el segundo caso la generatriz que corte á la directriz A en un punto cualquiera M, tírese por este un plano paralelo al plano director, y únase el punto M con aquel en que el auxiliar corte á la segunda directriz. Así, en una escalera cuyos montantes no estuvieran en un mismo plano, los peldaños, suponiendo que se hallaran equidistantes unos de otros, serian las generatrices de una superficie alabeada, y sus montantes serian las directrices (465).

Obsérvese que en ambos modos de generacion, dos generatrices cualesquiera no pueden hallarse en un mismo plano, pues de lo contrario las directrices se hallarian tambien en él, lo que es imposible.

* **522.** Las superficies alabeadas que tienen por directrices líneas rectas, gozan de una propiedad muy notable, cuya demostracion sintética se hallará en la *Geometría descriptiva* de Mr. Leroy, y es, que pueden ser engendradas por una recta de dos maneras distintas. Así, eligiendo entre todas las rectas que se apoyan sobre las tres directrices A, B, C, otras tres cualesquiera A′, B′, C′, y haciendo mover una recta sobre estas, engendrará la misma superficie. De donde se deduce, como observa Monge, que esta superficie pudiera construirse como un tejido. Los hilos de los cadillos serian las generatrices de uno de los modos de generacion, y los hilos de la trama las del otro.

* **523.** Cuando se mueve una recta de manera que en dos posiciones consecutivas se encuentre en un mismo plano, engendrará una SUPERFICIE DESARROLLABLE, *es decir, una superficie cuyos elementos pueden reunirse todos en un solo y mismo plano* SIN ROTURA NI DOBLEZ. En efecto, haciendo girar á cada elemento con la porcion de superficie adyacente alrededor de la recta que le separa del elemento que precede, podrá traerse el segundo sobre el plano del primero, el tercero sobre el mismo plano, y así los demás, de modo que la superficie toda vendrá á estenderse en un solo plano sin romperse ni doblarse.

* **524.** Considerando á una *curva de doble curvatura*, es decir, una curva de tal naturaleza que tres de sus elementos consecutivos no se hallen en un mismo plano, como si fuera una línea quebrada de infinito número de lados infinitamente pequeños, y prolongando indefinidamente cada uno de sus elementos, se formará una superfi-

cie desarrollable; porque dos de estas rectas consecutivas se hallan en un mismo plano. Así, se engendrará una tal superficie haciendo resbalar una recta sobre una curva de doble curvatura, de modo que sea tangente (514) á esta en todo su movimiento. La superficie engendrada de este modo se compone de dos *hojas* indefinidas y separadas una de otra por la curva directriz, á la que Monge ha llamado su *arista de retroceso*.

*525. Se sigue de lo dicho en el núm. 515, que el plano tangente á una superficie reglada en un punto dado, debe contener á la generatriz que pasa por este punto, porque esta recta es ella misma su tangente. Por lo tanto, para construir el plano tangente en un punto dado de una superficie alabeada, basta tirar un plano por las dos generatrices que pasan por este punto (522); y como dos de un mismo sistema no se hallan en un mismo plano (521), se ve que las tangentes tiradas á una tal superficie en dos puntos diferentes de una misma generatriz, son distintas; de modo que el plano tangente á una superficie de esta especie la corta en todos los puntos que no sean el de contacto.

*526. Por el contrario, el plano tangente á una superficie desarrollable en un punto dado, es tangente á la misma en todos los puntos de la generatriz que pasa por el de contacto. En efecto, trazando por este una curva cualquiera sobre la superficie, claro es que su tangente en este punto tendrá un elemento en el plano de la generatriz de que se trata y de la siguiente; luego toda ella se encuentra en él; por lo tanto, este plano es tangente en todos los puntos de esta generatriz.

527. Se llama *normal* la perpendicular levantada al plano tangente en el punto de contacto.

CAPÍTULO II.

SUPERFICIES CÓNICAS.

528. *Se llama superficie cónica la engendrada por una recta indefinida* AA′ (fig. 230), *que resbala sobre una curva dada* AMB *girando alrededor de un punto fijo* S. La curva es la *directriz*, y la recta la *generatriz* de la superficie. El punto fijo S es su centro (203); porque se comprende bien que tomando á uno y otro lado de él dos dis-

tancias iguales SK, SK′ sobre una misma generatriz, y tirando por los puntos K y K′ dos planos paralelos cualesquiera, dicho punto S dividirá en dos partes iguales las porciones de las otras generatrices comprendidas entre estos planos.

La superficie cónica se compone de dos *hojas*, engendrada cada una por las partes indefinidas SA y SA′ de la generatriz AA′.

529. Cuando la directriz tiene centro, la recta indefinida, tirada por él y el de la superficie, recibe el nombre de *eje* de la misma.

530. *Se llama* CONO *el espacio comprendido entre* UNA *de las hojas de la superficie cónica y un plano cualquiera.* La parte de plano interceptada por la superficie es la *base;* el centro S toma el nombre de *vértice;* la perpendicular bajada desde este punto al plano de la base es la *altura;* y por último, el eje de la superficie cónica es tambien *eje* del cono.

531. Este es *recto* ú *oblícuo*, segun que su eje es perpendicular ó no al plano de la base; y se llama *circular* cuando esta es un círculo.

532. *Puede considerarse al cono circular recto como engendrado por la revolucion de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos;* porque al girar el ASO sobre SO (fig. 231) el lado AO describe un círculo cuyo centro es O, y la recta SA, que resbala sobre la circunferencia de este, apoyándose constantemente en S, engendra una hoja de superficie cónica.

Luego, *haciendo girar á un ángulo*, *aunque no sea recto*, *alrededor de uno de sus lados*, *el movible engendrará una hoja de superficie cónica circular recta.*

533. La parte de cono comprendida entre dos planos paralelos se llama *tronco de cono de bases paralelas.* Su altura es la distancia que separa á los dos planos, y la parte de la generatriz que estos interceptan se llama su arista ó generatriz.

Es evidente que un tronco de cono recto de bases paralelas está engendrado por un trapecio rectángulo, que giró alrededor del lado perpendicular á sus dos bases.

Teorema I.

534. *Todo plano que pase por una generatriz y un punto cualquiera de la directriz de una superficie cónica corta á esta en dos ó mas generatrices.*

Porque es claro que cada una de las generatrices que pasan por los puntos en que el plano de que se trata corta á la directriz, tienen dos puntos en este plano, por lo que están todas ellas en él, y son las intersecciones del mismo con la superficie cónica.

Teorema II.

535. *El plano que pasa por una generatriz* SA *y la tangente* AT (fig. 230) *á la base del cono tirada por la traza de aquella, contiene las tangentes á todas las curvas que se puedan trazar sobre la superficie por los diferentes puntos de la generatriz, de modo que será el plano tangente al cono en uno cualquiera de los puntos de* SA.

Quedará demostrado el teorema haciendo ver que el plano SAT contiene la tangente KV á cualquiera curva KL que se trace sobre la superficie cónica. Para conseguirlo, hago pasar un plano por la generatriz SA y un punto M próximo al A, y cortará á la superficie cónica por la recta SM, y á la curva KL en uno de sus puntos N. Si ahora se hace girar este plano alrededor de SA de manera que el punto M se aproxime al A, las secantes AM y KN girarán á un mismo tiempo alrededor de A y de K, y cuando la recta móvil SM, que contiene á los puntos MN, coincida con SA, las secantes AM y KN habrán venido á ser respectivamente las tangentes AT y KV. Pero en este caso, el plano móvil ha tomado ya la posicion SAT, y como las dos secantes han permanecido siempre en este mismo plano, vemos que la tangente KV se halla tambien en el SAT. Además, este es tangente á la superficie cónica (**516**): luego, etc.

***536.** Escolio. Téngase presente que, si el punto por el que se quiere tirar un plano tangente á una superficie cónica fuera el mismo centro, el problema seria imposible: porque en él las generatrices son ellas mismas sus tangentes, y sin embargo se hallan de dos en dos en planos distintos.

Obsérvese tambien que la demostracion del n.° **515** no es aplicable al centro de una superficie cónica; porque la directriz paralela á la base del cono se va estrechando cada vez mas al aproximarse al centro, y concluye por reducirse á un punto; en este caso ya no admite tangente, propiamente hablando.

Lo mismo sucede en las superficies de revolucion cuyo meridiano corte al eje formando un ángulo nulo ó diferente de un recto; en los puntos de interseccion no hay plano tangente.

TEOREMA III.

537. *Una superficie cónica siempre es desarrollable.*

Para demostrarlo, supongo que se haya inscripto un polígono en la curva que resulte de la interseccion de la superficie cónica con un plano, y que se haya hecho pasar otros por cada uno de los lados de este polígono y el centro de la superficie. Habrémos formado así un ángulo poliedro, y se ve fácilmente que puede hacerse girar á SAB (fig. 232) alrededor de la arista SB hasta que venga á colocarse en el plano de la cara SBC y á continuacion de esta; despues hacer girar el sistema de estas dos caras alrededor de la arista SC, hasta que haya venido á rebatirse en el plano de la cara siguiente SCD, y así con las demás; luego toda la superficie de este ángulo poliedro puede quedar estendida sobre un mismo plano, y los lados del polígono ABCD... lo mismo que las partes SA, SB, SC... de las aristas comprendidas entre el centro S de la superficie y el plano secante, habrán conservado sus longitudes, de modo que el desarrollo será un sector poligonal.

Pero estas consecuencias son ciertas, cualquiera que sea la magnitud de los ángulos y de los lados del polígono que hemos sustituido á la base del cono; luego tambien lo serán cuando todos los lados de este polígono sean infinitamente pequeños, es decir, cuando el ángulo poliedro S haya llegado á su límite, que es la superficie cónica propuesta.

538. Como todas las generatrices de un cono recto son iguales, si concebimos cortada una superficie cónica á lo largo de una de ellas, y que se la haya estendido sobre un plano, su desarrollo será un sector S'A'MB' (fig. 231), cuyo radio S'A' será igual á la generatriz, y cuya base A'MB' tendrá la misma longitud que la circunferencia de la base del cono, de modo que, para determinar el número de grados de esta base A'B', se establecerá la proporcion [1]

$$\frac{AO}{SA}=\frac{x}{360}.$$

[1] Es evidente que

$$\frac{A'MB'}{\text{circunf.}^a\ S'A'}=\frac{x}{360},$$

llamando x al número de grados del arco A'MB'; pero A'MB' = circunf.ª AO; luego

$$\frac{\text{circunf.}^a\ AO}{\text{circunf.}^a\ S'A'} \text{ ó bien } \frac{AO}{S'A' \text{ ó } SA}=\frac{x}{360}$$

Por ejemplo, si AO y SA valieran respectivamente 6 centímetros y 10 centímetros, se hallaria que $x = 216^{0}$; luego haciendo un ángulo de 216 grados, y describiendo entre sus lados un arco cuyo radio fuese de 10 centímetros, tendríamos el desarrollo del cono

539. Para desarrollar un cono oblícuo y de base cualquiera, se

dado.

dividirá el perímetro de esta en un número de partes bastante grande para que cada una de ellas pueda ser tomada como línea recta, y se supondrán unidos todos los puntos de division con el vértice; despues se construirán sucesivamente y á continuacion unos de otros todos los triángulos en que se haya dividido la superficie del cono, lo que será fácil, porque se pueden medir los tres lados de cada uno; y haciendo pasar un trazo contínuo por las estremidades de las bases de todos los triángulos, quedará efectuado el desarrollo.

Por lo general, el cono viene dado únicamente por su base, su altura y la proyeccion de su vértice; pero entonces los lados que se bajen desde el vértice serán las hipotenusas de triángulos rectángulos que tienen por altura comun la del cono, y por bases las distancias de los diferentes puntos de division á la proyeccion del vértice, de modo que es fácil construir estos lados.

540. De la misma manera se efectuará el desarrollo de la superficie de un tronco de cono.

CAPÍTULO III.

SUPERFICIES CILÍNDRICAS.

541. *Se llama* SUPERFICIE CILÍNDRICA *la engendrada por una recta indefinida* AA′ *que resbala sobre una curva dada* CMB (fig. 233), *conservándose siempre paralela á sí misma.* La curva y la recta son respectivamente la *directriz* y la *generatriz* de la superficie.

542. Cuando la directriz tiene centro (203), la paralela á las generatrices tirada por este punto, se llama *eje* de la superficie cilíndrica.

543. CILINDRO *es el espacio comprendido entre dos planos paralelos y una superficie cilíndrica.* Las áreas de las secciones causadas en estos planos por la superficie cilíndrica son las *bases* del cilindro; la distancia entre estas, su *altura;* y por último, el eje de la superficie cilíndrica lo es tambien del cilindro.

544. Este es *recto* ú *oblícuo*, segun que la generatriz de su superficie curva convexa sea perpendicular ó no á los planos de sus bases; y se dice que es *circular* cuando estas son círculos.

545. De las definiciones de los números **528** y **541** se deduce que podemos considerar á la superficie cilíndrica como una cónica cuyo centro se hubiera alejado hasta el infinito; porque entonces todas las generatrices de esta última se habrian quedado paralelas. Por consiguiente, la superficie cilíndrica gozará de todas las propiedades de la cónica que sean independientes de la distancia á que se halle situado su vértice.

546. Segun esto, *un cilindro puede ser considerado como un tronco de cono de bases paralelas, cuyo vértice esté infinitamente distante.* Luego *el cilindro circular recto está engendrado por la revolucion de un rectángulo alrededor de uno de sus lados.*

547. *Todo plano que pase por una generatriz y por un punto cualquiera de la directriz, corta á la superficie cilíndrica en dos ó mas generatrices* (**534**).

548. *Todo plano que pase por una generatriz y por la tangente á la base en el punto en que aquella la corta, contiene las tangentes á todas las curvas que se pueden trazar sobre el cilindro por los diversos puntos de esta generatriz; de suerte que este plano tocará al cilindro en todos los puntos de la misma* (**535**).

549. *Toda superficie cilíndrica es desarrollable* (**523** ó **537**), y su desarrollo, si es recta, será un rectángulo cuya altura será la misma del cilindro, y las bases serán iguales en longitud á los perímetros de las de aquel (**538**). Nada, pues, será mas fácil que construir el desarrollo de la superficie convexa de un cilindro recto.

Si fuera oblícuo, no habrá mas que ceñirle un hilo bien tirante, que tomará evidentemente la forma de la línea mas corta que se pueda trazar sobre la superficie cilíndrica, y además serán todos sus elementos perpendiculares á las generatrices correspondientes, de modo que, midiendo las partes de estas comprendidas entre el hilo y una de las bases, se podrá trazar el desarrollo de esta. Pero si el cilindro no estuviese construido, ó si la superficie curva no fuese convexa, habrá que recurrir á los procedimientos que enseña la Geometría descriptiva.

CAPÍTULO IV.

SUPERFICIE ESFÉRICA.

550. SUPERFICIE ESFÉRICA *es aquella cuyos puntos están equidistantes todos de uno que se llama* CENTRO. *El espacio envuelto por esta superficie se llama* ESFERA.

Las rectas que van desde el centro á la superficie se llaman *radios*; y la que termina por sus dos estremos en la superficie, pasando por el centro, recibe el nombre de *diámetro*.

Todos los radios son iguales, y lo mismo los diámetros.

551. Se sigue inmediatamente de esta definicion, que *la superficie esférica está engendrada por la revolucion de una semi-circunferencia alrededor de su diámetro*.

552. CASQUETE ESFÉRICO *es la porcion de la superficie esférica que separa un plano al cortar á esta;* y se engendra por un arco AC (fig. 234) que gira alrededor de un diámetro CD tirado por uno de sus estremos. La circunferencia que describe el otro estremo A del arco, es la *base* del casquete, y la proyeccion CI del arco generador sobre el eje, la *altura*.

553. *Se llama* SEGMENTO *esférico el espacio comprendido entre el casquete y el plano de la base*.

554. *Una* ZONA *es la porcion de superficie esférica comprendida entre dos planos paralelos*. La engendra un arco AF cuando gira alrededor de un diámetro CD, que no encuentre á este arco. Las circunferencias que describen sus estremos son las *bases* de la zona, y *altura* la proyeccion del arco sobre el eje.

555. REBANADA *esférica es el espacio comprendido entre una zona y los planos que la terminan*.

556. HUSO *es la parte* CGDNC *de superficie esférica comprendida entre las caras de un ángulo diedro cuya arista pase por el centro de la esfera*. La porcion de esfera que queda entre el huso y las caras del diedro se llama CUÑA.

557. *Recibe el nombre de* SECTOR *esférico el cuerpo engendrado por uno circular* AOC *cuando gira alrededor de cualquiera de los radios que le limitan*; de modo que se compone de un cono y de un segmento unidos por su base comun.

TEOREMA I.

558. *Cuatro puntos* A, B, C, D (fig. 235), *que no esten en un mismo plano, determinan una esfera.*

Sean F y G los centros respectivos de las dos circunferencias que se pueden hacer pasar por los puntos A, B, C y C, D, A, y levántense en ellos las perpendiculares FI y GK á los planos de estas circunferencias : digo que estas perpendiculares se han de cortar. En efecto, bajando otras sobre AC desde los puntos F y G, irán á concurrir en el medio M de esta recta (82), y determinarán un plano perpendicular á AC (433), y por lo tanto, á los ABC y ACD (481); luego las perpendiculares FI y GK á estos planos se hallarán en el FMG (483); por consiguiente, se cortarán; pues si no, FM, que es perpendicular sobre FI, lo seria tambien á su paralela GK, y como MG lo era ya á esta recta, se podrian bajar desde M dos perpendiculares MF y MG á una misma recta GK, lo que es absurdo, á no ser que ambas coincidiesen. Pero entonces los planos ABC y ADC tendrian dos rectas comunes FMG y AC, y no formarian mas que uno solo, lo que es contra la hipótesis; luego las FI y GK se cortarán en un cierto punto O. Este, por pertenecer á la primera, está equidistante de los tres puntos A, B, C; tambien equidista de A, C, D por hallarse en la segunda; luego se halla á un mismo tiempo equidistante de los cuatro puntos A, B, C, D. En vista de esto, la superficie esférica descrita desde el punto O como centro, con el radio OA, pasa forzosamente por estos cuatro puntos; luego se puede siempre describir una esfera dándose cuatro puntos que no estén en un mismo plano.

Voy ahora á demostrar que solo una puede pasar por tales puntos. En efecto, imaginémonos otra que tambien pase por ellos. Su centro estará necesariamente sobre la perpendicular FI, porque si no, siendo el pié de la que se bajase desde el centro sobre el plano ABC diferente del punto F, no se hallaria este centro equidistante de los tres puntos A, B, C: por la misma razon se hallará tambien sobre la perpendicular GK, y coincidirá, por lo tanto, con el punto O. Así, pues, las dos superficies esféricas tendrán el mismo centro y el mismo radio, y no formarán mas que una sola.

559. ESCOLIO. Si los cuatro puntos se hallasen en un mismo plano, las dos perpendiculares FI y GK serian paralelas, y como el centro de la superficie esférica que pasase por estos cuatro puntos deberia

hallarse á la vez sobre ambas, segun acabamos de demostrar, seria imposible describir tal superficie que pasase por dichos cuatro puntos A, B, C, D, á no ser que las FI y GK se confundiesen en una sola línea, para lo cual seria preciso que los referidos puntos estuvieran situados en una misma circunferencia. En efecto, en este caso, todos los de la perpendicular levantada al plano por este centro están equidistantes de aquellos puntos.

Teorema II.

560. *Toda seccion* AMB (fig. 234) *causada en una superficie esférica por un plano es una circunferencia de círculo, y la perpendicular* OI *bajada al mismo plano desde el centro* O *pasará por el de dicha circunferencia y cortará á la superficie esférica en dos puntos* C *y* D, *que cada uno equidistará de todos los de la circunferencia, y que se llaman sus* POLOS.

En efecto, los radios que vayan desde el centro de la esfera á los diferentes puntos de la interseccion de esta con el plano secante serán iguales, y por ser oblícuas bajadas desde un mismo punto tendrán sus piés equidistantes del pié I de la perpendicular bajada al mismo plano desde el centro de la esfera: de modo que todos los puntos de dicha interseccion están en un mismo plano, que es el plano secante, y equidistantes de uno mismo, que es el pié de la perpendicular bajada á este plano desde el punto O; luego forman una circunferencia. Además, los puntos C y D equidistan de todos los de dicha circunferencia, como pertenecientes á la perpendicular levantada al plano de la seccion en su centro I.

561. Corolario. Recordando que en el triángulo rectángulo OIM se verifica que

$$\overline{OM}^2 = \overline{OI}^2 + \overline{IM}^2,$$

se verá que, por ser constante la suma de los cuadrados de las dos rectas OI é IM, si una de ellas aumenta ó disminuye, la otra disminuye ó aumenta al mismo tiempo; de donde se deduce:

1.° Que un círculo de la esfera es tanto menor ó mayor, cuanto mas lejos ó mas cerca pase su plano del centro de la misma esfera;

2.° Que cuando el plano del círculo pase por este punto, el radio de este es el mismo que el de la esfera. Este radio es el *máximo*, porque la distancia OI es entonces la *mínima*.

De aquí proviene la distincion de los círculos de la esfera en *máximos* y *menores*. *Se llama círculo* MÁXIMO *aquel cuyo plano pasa por el centro de la esfera, y* MENOR *aquel cuyo plano no pasa por dicho centro.*

3.° *Dos círculos menores iguales están equidistantes del centro de la esfera, y recíprocamente; y de dos círculos desiguales, el mayor está mas próximo al centro, y recíprocamente.*

562. De la definicion de círculos máximos de la esfera, se deduce:

1.° *Que todos los círculos máximos son iguales;*

2.° *Que dos círculos máximos se cortan en dos partes iguales;* porque su línea de interseccion es un diámetro comun á los dos, por pasar por el centro de la esfera;

3.° *Que por dos puntos dados sobre una superficie esférica se puede siempre hacer pasar un arco de círculo máximo, pero nada mas que uno;* porque los dos puntos dados y el centro de la esfera determinan un plano. Con todo, si los dos puntos dados fuesen los estremos de un mismo diámetro, se los podria unir por una infinidad de arcos de círculo máximo, porque por una sola recta se pueden hacer pasar una infinidad de planos;

4.° *Todo círculo máximo divide á la esfera y á su superficie en dos partes iguales, que se llaman* HEMISFERIOS; porque volviendo una de las dos partes y colocándola sobre la otra, de modo que coincidan sus bases, deberán adaptarse exactamente las superficies que las terminan, pues de lo contrario no tendrian todos sus puntos equidistantes del centro.

563. ESCOLIO I. *La perpendicular bajada desde el centro de una esfera sobre un plano secante cualquiera satisface á las cinco siguientes condiciones: 1.ª pasar por el centro de la esfera; 2.ª ser perpendicular al plano secante; 3.ª pasar por el centro del círculo de interseccion; 4.ª* y *5.ª pasar por cada polo de este círculo.* Como dos cualesquiera de estas condiciones bastan para determinar una recta, *la que satisfaga á dos cualesquiera de las cinco, satisface al mismo tiempo á las otras tres* (83).

564. ESCOLIO II. *Uniendo uno de los polos de un círculo con los diferentes puntos de su circunferencia por arcos de círculo máximo, todos estos serán iguales*, como subtendidos por cuerdas iguales, y serán además perpendiculares á la circunferencia (481); porque se dice que un arco es perpendicular á otro cuando sus planos se cortan perpendicularmente (mas adelante (566) se verá el motivo de usar esta denominacion).

El arco CN *de círculo máximo* (fig. 234) *que va desde el polo de un círculo de esta clase* FNG *á su circunferencia*, *es un* CUADRANTE (en lo sucesivo llamarémos así á la cuarta parte de la circunferencia del círculo máximo); porque el arco CN está comprendido entre los lados de un ángulo recto CON, descrito desde su vértice O como centro.

TEOREMA III.

565. *Haciendo girar un* COMPÁS ESFÉRICO (se llama así aquel que tiene sus piernas curvas) *alrededor de una de sus piernas fija en* C *sobre la esfera, al resbalar la otra sobre la superficie, irá describiendo, en esta una circunferencia*, *de la cual será uno de los polos el punto en que se apoya la pierna fija* (fig. 234).

Efectivamente, tirando el radio OC, y uniendo el centro O con todos los puntos A, M, B,..... de la curva descrita, como todas las rectas CA, CM, CB,..... son iguales por construccion, los triángulos CAO, CMO, CBO..... tienen todos sus lados respectivamente iguales, y las perpendiculares bajadas desde los vértices A, M, B..... sobre la base comun CO, van á cortarla en un mismo punto I, y determinan así un plano perpendicular al radio CO; por lo tanto, la curva AMB es una circunferencia, y C uno de los polos de esta.

Observarémos tambien que si la abertura del compás esférico fuese igual á la cuerda que subtiende á un cuadrante, los ángulos AOC, MOC, BOC..... serian rectos, y todos los radios AO, MO, BO..... perpendiculares á OC; por lo cual todos los puntos de la curva AMB se hallarian en un plano que pasaria por O, de modo que esta curva seria una circunferencia de círculo máximo.

566. Pudiéndose considerar una curva como una línea quebrada de lados infinitamente pequeños, y suponer que la tangente á esta curva en un punto cualquiera tiene un elemento comun con ella (514), vemos que la medida natural de la inclinacion de dos curvas que se cortan es el ángulo formado por los dos elementos que concurren en su punto de interseccion, es decir, por el ángulo que forman las tangentes tiradas á cada curva en este punto. Así, dirémos que *el ángulo formado por dos curvas que se cortan es el mismo que forman las tangentes en el punto en que lo verifican.*

De modo que *el ángulo formado por los dos arcos de círculo máximo* CGD *y* CND (fig. 234) *es precisamente el* SCT *formado por las* *tangentes* CT *y* CS. Pero este ángulo es la medida del diedro GCDN que forman sus planos; luego puede tomarse uno por otro; y en este sentido es en el que se dice que *el ángulo de dos arcos de círculo máximo es el diedro que forman sus planos.*

Si desde el punto C como polo y con una abertura de compás igual á la cuerda de un cuadrante, se describe el arco GN entre los lados del ángulo esférico C y se tiran los radios ON y OG, se formará el ángulo NOG, que tendrá por medida el arco NG; y como este ángulo es igual á SCT (461), puede tambien decirse que *el ángulo formado por dos arcos de círculo máximo tiene por medida el arco de esta especie comprendido entre ellos, y descrito desde su vértice como polo.*

Teorema IV.

567. *El plano tangente á la esfera es perpendicular al radio que va al punto de contacto.*

En efecto, puede mirársele (516) como determinado por las tangentes CS y CT (fig. 234) á dos circunferencias de círculo máximo trazadas por el punto C; pero estas son perpendiculares al radio CO (85); luego el plano tangente tambien es perpendicular á esta línea.

Del mismo modo que en el núm. 86, se demostrará que el plano tangente á una esfera solo tiene un punto comun con la superficie de esta.

Teorema V.

568. Recíprocamente, *todo plano perpendicular á un radio* OC *en su estremo es tangente á la esfera.*

Pues si por el radio OC se hacen pasar dos planos cualesquiera, sus trazas sobre el que se dió serán tangentes á los círculos máximos en que aquellos cortan á la esfera; luego el plano tangente coincide con el de que se trata.

Se demostrará, como en el núm. 89, que todo plano que no tiene mas que un punto comun con la esfera, es tangente á esta,

Teorema VI.

569. *La interseccion de dos esferas es un círculo, y la recta que une sus centros es perpendicular al plano de este y pasa por su centro.*

Con efecto, uniendo cada punto de la curva de interseccion con los centros de las dos esferas, y estos entre sí, se formarán una infinidad de triángulos iguales; y las perpendiculares bajadas desde el vértice de cada uno sobre la base comun, es decir, sobre la recta que une los centros, serán iguales, é irán á cortarla en el mismo punto; luego formarán un círculo cuyo centro estará sobre esta recta, y cuyo plano será perpendicular á la misma.

Teorema VII.

570. *Para que dos esferas se toquen, es necesario y suficiente que la distancia de los centros sea igual á la suma ó á la diferencia de los radios.*

Véanse las demostraciones de los números **99**, **100**, **101** y **102**.

Teorema VIII.

571. *Para que dos esferas se corten, es necesario y suficiente que la distancia de los centros sea menor que la suma de sus radios, y mayor que la diferencia.*

Véase la demostracion del núm. **104**.

572. *Llámase* TRIÁNGULO ESFÉRICO *la porcion de superficie esférica comprendida entre tres arcos de círculo máximo menores cada uno que una semi-circunferencia* [1]; tal es la figura ABC (fig. 236). Los planos de estos círculos máximos forman un ángulo triedro cuyo vértice está en el centro de la esfera; las caras de este triedro tienen respectivamente por medida los lados del triángulo esférico; y los ángulos diedros del triedro están medidos por los ángulos del triángulo. Así es que *la teoría de los triángulos esféricos se refiere inmediatamente á la de los ángulos triedros;* y de esta observacion se desprenden, como inmediatas consecuencias, las siguientes proposiciones:

---

[1] Hay, sin embargo, triángulos esféricos cuyos lados son mayores que una semi-circunferencia de círculo máximo; porque, terminando la circunferencia de que AB forma parte, y restando del hemisferio CABD el triángulo ABC (fig. 236), cuyos tres lados se supone que satisfacen á la definicion, el resto ADBC comprendido entre los tres arcos de círculo máximo ADB, AC y BC será tambien un triángulo esférico, y el lado ADB es mayor que una semi-circunferencia. Con todo, si conociéramos los lados y los ángulos del triángulo ABC, inmediatamente se tendrian los lados y ángulos del ADBC. Esta es la razon de que se hayan escluido de la definicion de triángulos esféricos los que son de la especie de este último.

Teorema IX.

573. *En todo triángulo esférico, un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.*

Porque siendo una cara cualquiera de un ángulo triedro menor que la suma de las otras dos (496), su medida es menor tambien que la suma de las de estas otras.

Teorema X.

574. *En todo triángulo esférico, la suma de los tres lados es menor que una circunferencia de círculo máximo.*

Porque la suma de las tres caras de un triedro es menor que cuatro rectos (497) y por lo tanto, la de sus medidas, que es la de los lados del triángulo, será menor que la medida de cuatro rectos, ó sea menor que una circunferencia de círculo máximo.

Teorema XI.

575. *La suma de los ángulos de todo triángulo esférico es mayor que dos rectos y menor que seis* (498).

576. Escolio. La suma de los ángulos de un triángulo esférico no es una cantidad constante como la de los rectilíneos; por esto, dados dos ángulos, no queda determinado el tercero; y un triángulo esférico puede tener dos ó tres ángulos rectos ú obtusos.

Teorema XII.

577. *Dos triángulos esféricos pertenecientes á una misma esfera ó á esferas del mismo radio, son iguales en los cuatro siguientes casos.*

1.° *Cuando los lados del uno son iguales respectivamente á los del otro.*

2.° *Cuando sus ángulos son iguales uno á uno.*

3.° *Cuando tienen un ángulo igual comprendido entre dos lados respectivamente iguales.*

4.° *Teniendo un lado igual adyacente á dos ángulos respectivamente iguales; con tal de que además tengan sus partes homólogas semejantemente colocadas.*

En efecto, se concibe que, siendo superponibles los ángulos triedros correspondientes á estos dos triángulos, tambien lo serán los mismos triángulos.

578. Escolio. Si los elementos, cuya igualdad constituye la de los dos triángulos, estuviesen en el uno dispuestos en un órden inverso que en el otro, tendrian todas sus partes homólogas iguales; pero no serian superponibles, y se diria entonces que los triángulos eran *simétricos*.

Teorema XIII.

579. *Si desde los vértices de un triángulo esférico* ABC *como polos* (fig. 237), *se describe tres arcos de círculo máximo, se formará un nuevo triángulo esférico* A′B′C′, *cuyos lados serán los suplementos de los ángulos del primero y los ángulos suplementos de los lados de este* [1].

Sea O el centro de la esfera, y como por construccion son iguales á un cuadrante las distancias desde B′ á A y á C, serán rectos los ángulos B′OA y B′OC, y por lo tanto, la OB′ perpendicular al plano del círculo AC; por idéntica razon, OA′ y OC′ lo son á los planos respectivos de los círculos BC y AB; luego el ángulo triedro OB′A′C′ es el suplementario del OBAC.

580. Escolio I. Conviene, sin embargo, observar que este ángulo triedro tiene sus aristas dirigidas en sentido contrario de las del S′ de la figura 220 respecto á S, y que por lo mismo es el simétrico del suplementario de OABC.

581. Escolio II. Tambien observarémos que los vértices A′, B′, C′ son los polos de los lados BC, AC y AB. En su consecuencia, los triángulos ABC y A′B′C′ se llaman *triángulos polares*.

Teorema XIV.

582. *La línea mas corta que se puede trazar en la superficie de una esfera desde un punto* A *á otro* B (fig. 238), *es el arco de círculo máximo que los une.*

Primera demostracion. Supongamos que la línea mas corta que se pueda tirar sobre la esfera desde el punto A al B no sea el arco AMB de círculo máximo, y sí la ACDEB. Tomemos sobre esta un

[1] El triángulo A′B′C′ se distingue de los demas que forman los arcos que se han descrito, en que los vértices A y A′ están al mismo lado de BC; B y B′ á uno mismo de AC y C y C′ al mismo de AB.

punto cualquiera D, y uniendo el B con el centro O de la esfera, hagamos girar el plano DBO alrededor de OB; es claro que, como todo es simétrico sobre la superficie de la esfera respecto al punto B, la línea DM descrita por el punto D tendrá todos sus puntos equidistantes del B. Si ANMPB es la mas corta distancia para ir sobre la esfera desde A á B, pasando por M, se tendrá DEB=MPB, y por lo tanto,

[1] $$ACD < ANM;$$

porque, por hipótesis, ACDEB es mas corta que ANMPB. Pero juntando el punto D con los A y B por medio de arcos de círculo máximo, el lado AB del triángulo esférico ABD será menor que la suma de los otros dos AD y BD; luego, restando de una parte MB y de la otra su igual DB, quedará AD>AM ([1]). Por consiguiente, si se hace girar el plano MAO alrededor del radio AO, el punto M describirá una curva respecto de la cual será esterior el puntó D; luego este punto está mas distante del A que del M, lo que es contradictorio con la desigualdad [1]. Así, pues, no se puede suponer que haya desde el punto A al B una línea mas corta que el arco de círculo máximo AMB, y este será, por lo mismo, el camino mas corto para ir desde el primero al segundo de dichos puntos.

Segunda demostracion. Sea AMB (fig. 239) la línea mas corta que pueda trazarse sobre una esfera desde el punto A al B. Digo, en primer lugar, que si se toman otros dos puntos cualesquiera N y P sobre esta curva, la línea NMP será tambien la mas corta que se pueda tirar desde N hasta P; porque si no fuese así, y NQP fuera el camino mas corto desde N hasta P, claro es que ANQPB seria menor que AMB, y esto es contra la hipótesis. Como esto ha de verificarse, cualquiera que sea la longitud del arco NMP, vamos á indagar cuál debe ser la forma de la curva AMB, para que la suma de dos cualesquiera de sus elementos consecutivos sea la menor posible. Supongamos que sean NM y MP dos de sus elementos, y tiremos en los puntos M y P dos planos tangentes á la esfera: los elementos NM y MP se hallarán todos enteros en estos planos (517), que se cortarán segun una cierta recta RMS. Ahora bien; si NM

([1]) Esto supone que el punto M se halla entre A y B; pero si no fuese así, no habria mas que hacer girar el plano ABO alrededor del radio BO, y la curva descrita por el punto A quedaria envuelta por la que ha trazado el punto D, y de aquí resulta que el punto A se hallará mas cerca de B que el D, lo que es contra la hipótesis.

y MP no son perpendiculares á esta recta, se podrán bajar desde los puntos N y P perpendiculares sobre RS; mas si suponemos que el pié Q de la primera esté mas cerca de M que el de la segunda, y unimos Q con P, tendrémos entonces

$$NQ+QP<NM+MP.$$

Por el contrario, en caso de que MN y MP fuesen perpendiculares á RS, tendríamos,

$$NQ+QP>NM+MP,$$

siendo Q un punto infinitamente próximo á M; luego *la propiedad de ser el* MÍNIMO *pertenece á los dos elementos* que son perpendiculares á la interseccion de dos planos tangentes consecutivos, ó de otro modo, á los dos elementos *cuyo plano es perpendicular al tangente tirado en su plano comun;* porque esta interseccion está en este plano. Pero el radio que va al punto M, por ser perpendicular al plano tangente, se halla en el de los dos elementos NM y MP, el cual pasa, en consecuencia, por el centro de la esfera: así, el plano de dos elementos consecutivos de la línea AMB tiene de comun con el determinado por uno de estos elementos y el siguiente, una recta y un punto; luego todos los de esta curva se hallan en un mismo plano, que pasa por el centro de la esfera, y AMB es un arco de círculo máximo.

*583. Acabamos de ver (582, segunda demostracion) que la propiedad de ser un *mínimo* pertenece á los dos elementos cuyo plano es perpendicular al tangente levantado en su punto comun: el plano de estos elementos es normal á la superficie, por lo que se puede establecer este notable teorema:

La línea mas corta que puede trazarse en una superficie esférica entre dos puntos dados, es la que goza de la propiedad de que el plano de dos elementos consecutivos cualesquiera sea normal á esta superficie.

PROBLEMA I.

584. *Dada una esfera, hallar su radio.*

Señalemos en la superficie tres puntos A, B, C (fig. 240) equidistantes de otro cualquiera P de la misma. El plano que determinan cortará á la esfera por un círculo del que P será uno de los polos. Supongamos que su centro sea D, AD será entonces el radio, y para conocerle bastará construir un triángulo A'B'C' cuyos tres lados sean respectivamente iguales á AB, AC y BC, y circunscribirle una circunferencia; porque claro es que este círculo y el determinado por los tres puntos A, B, C son superponibles. Ahora ya conocemos la hipotenusa AP y la base AD del triángulo rectángulo APD, y será fácil construir el A'P'D' igual á este, con lo cual se determinará el ángulo P. Mas si en el plano APO concebimos una perpendicular en el medio de AP, irá á pasar por el centro O de la esfera, y se tendrá un triángulo rectángulo PFO, en que se conoce el ángulo P y el lado PF, mitad de AP: de modo que, levantando una perpendicular F'O' en medio de P'A', se formará otro triángulo rectángulo P'F'O' igual al PFO; luego P'O' = PO, y en P'O' se tendrá el radio de la esfera.

Levantando en el punto O' una perpendicular O'Q' = O'P' sobre O'P', la distancia P'Q' será la abertura que es necesario dar al compás esférico para describir en esta esfera arcos de círculo máximo.

Problema II.

585. *Describir una circunferencia de círculo máximo que pase por dos puntos* N *y* G *dados sobre la superficie de una esfera.*

Es evidente que la cuestion está reducida á buscar un polo de la circunferencia pedida; y como este dista un cuadrante de cada uno de los dos puntos dados, si desde los N y G como polos (fig. 234), y con una abertura de compás esférico igual á la cuerda de un cuadrante, describimos dos circunferencias, sus puntos de interseccion C y D serán los polos de la circunferencia que se busca, la cual se describirá haciendo girar el compás alrededor de una de sus puntas fija en C ó en D.

Problema III.

586. *Por un punto dado hacer pasar un arco de círculo máximo perpendicular á otro dado* NG (fig. 234).

Córtese este arco prolongándole, si es necesario (584), por otro descrito desde el punto que se da como polo, y con una abertura de compás igual á la cuerda de un cuadrante; y el punto de interseccion será el polo del arco pedido, que será ya fácil de describir.

Si el arco dado perteneciese á un círculo menor AMB, se determinarian primero sobre este arco dos puntos M y B que estuviesen á igual distancia del punto dado C, y despues otro P que se hallara equidistante de estos últimos; y no habria mas que hacer pasar un arco de círculo máximo por los puntos C y P. En efecto, se comprende bien que, uniendo los tres puntos C, P y O con el medio de la cuerda MB por rectas, estas serán perpendiculares á dicha cuerda y determinarán, por lo mismo, un plano que tambien le será perpendicular, y cuya interseccion con la esfera será un arco de círculo máximo perpendicular al AMB.

587. Una de las aplicaciones mas interesantes de las propiedades de la esfera es la que han hecho los geógrafos, y de que vamos á dar una sucinta idea.

Se sabe que la tierra gira sobre sí misma en veinticuatro horas, lo que produce la alternativa de dias y noches, y que este movimiento se ejecuta alrededor de una cierta línea *imaginaria*, que pasa por el centro, y á la que se llama *eje*. Los puntos en que este atraviesa á la superficie terrestre se llaman los *polos* de la tierra: uno el *polo norte* ó *boreal*, y otro *polo sud* ó *austral*. Un plano que se tire por el centro de la tierra, perpendicularmente á su eje, la corta por un círculo máximo, que se llama *ecuador*, no porque divida á la esfera en dos partes iguales (porque esta es una propiedad de todo círculo máximo), sino porque la duracion del dia es igual á la de la noche cuando el sol se encuentra en su plano. En fin, se llama *meridiano* á todo círculo máximo que pase por los dos polos. Cada punto de la tierra tiene su meridiano, y entre la infinidad de ellos hay uno que se llama el *meridiano principal* ó *primer meridiano*, y es generalmente para cada nacion el que pasa por su observatorio principal: así es que en Francia el primer meridiano es el que atraviesa por el observatorio de Paris; en España, por el de Madrid, y algunas veces se toma como tal el que corresponde al observatorio de San Fernando.

Se llama latitud de un pueblo el arco de meridiano comprendido entre el pueblo y el ecuador, y se dice que la latitud es boreal ó austral, segun que el lugar de que se trate se halle situado en el hemisferio boreal ó en el austral. Ahora, si por un punto del globo se concibe que pase un círculo *paralelo* al ecuador, todos los puntos de su circunferencia tendrán la misma latitud, y serán además los únicos que gozarán de esta propiedad: luego *la latitud de un lugar determina el* PARALELO *sobre que se halla situado.*

Se llama longitud de un pueblo el arco de ecuador comprendido entre su meridiano y el que se haya tomado por primero ó principal. Mirando este primer meridiano como dirigido de Sud á Norte, se dice que es oriental la longitud ú occidental, segun que el pueblo de que se trata esté situado al *Este* ó al *Oeste* de este círculo. Todos los puntos del semi-meridiano sobre el que se halla un pueblo tienen la misma longitud que él, y son además los únicos que gozan de esta propiedad; luego, conociendo la longitud de un lugar, se tiene determinado el semi-meridiano sobre el cual se encuentra.

Vemos, por lo tanto, que un punto del globo terrestre queda determinado completamente, cuando á la vez se conozca su longitud y su latitud. Para mayor facilidad, se ha dividido el ecuador en 360°, de los cuales 180 están al Este y los otros 180 al Oeste, á partir de una de sus intersecciones con el primer meridiano; y la mitad de este en 180°, á saber: 90 hácia el Norte y otros tantos hácia el Sud, á partir de esta misma interseccion, que por esta razon está marcada con *cero*. Así para figurar en el globo un punto de la tierra cuya latitud sea 45° boreal, y la longitud 15° oriental, se fijará una punta de un compás esférico en el polo boreal, y se llevará la otra al punto del primer meridiano en que estén marcados 45°. Haciendo entonces girar el compás, se describirá sobre la esfera el paralelo del lugar pedido. En seguida se colocará una punta del mismo compás en la division del ecuador numerada con 15 hácia el lado del Este, y llevando la otra punta á 90 grados de esta division, esto es, á la 105, solo faltará hacer girar el compás alrededor de este segundo punto desde el ecuador hácia el polo, para describir el cuadrante del meridiano del lugar que se busca, y su interseccion con el paralelo resolverá el problema. Tal es el procedimiento por cuyo medio se construyen globos que representen fielmente la posicion de los puntos notables de la superficie terrestre, como las principales ciudades, el curso de los rios, la direccion de las cordilleras, el contorno de los mares, etc., etc.

Como está determinado un pueblo cuando se conoce su longitud y su latitud, debe ser posible el determinar la distancia de dos lugares M y P (fig. 234) dados por sus longitudes y latitudes. En efecto, concibiendo que se hayan trazado sus meridianos, es claro que la diferencia de sus longitudes, si están á un mismo lado del meridiano principal, ó la suma de ellas, si se hallan á distinto lado de este, será el ángulo de los mismos meridianos (566); mas concibiendo tambien el plano del círculo máximo que une los dos lugares, se formará en el centro de la tierra un triedro OCPM en que se conocerán dos caras COP y COM, y el diedro comprendido PCOM;

porque estas caras tienen por medida los complementos de las latitudes de los puntos P y M, y la del diedro el arco NK, diferencia ó suma de sus longitudes: luego construyendo la tercer cara de este triedro, no habrá mas que hallar la longitud del arco que la mida (383).

588. PROBLEMAS PARA RESOLVER. 1.° *Por tres puntos dados en la superficie de una esfera, describir una circunferencia de círculo.— Hallar el polo de un círculo dado.*

2.° *Describir una circunferencia de círculo máximo que pase por un punto dado sobre la superficie de una esfera, y que sea tangente á otra dada de círculo menor.*

3.° *Por un punto dado sobre la superficie de una esfera, trazar un arco de círculo máximo que forme un ángulo dado con otro arco de la misma especie.*

4.° *Describir un arco de círculo máximo que sea tangente á dos circunferencias dadas sobre la superficie de la esfera.*

LIBRO OCTAVO.

POLIEDROS.

CAPÍTULO PRIMERO.

PROPIEDADES GENERALES DE LOS POLIEDROS.

589. *Se llama* POLIEDRO *el cuerpo terminado por todas partes por caras planas.* Los planos que forman estas caras se cortan de dos en dos segun líneas rectas; de modo que el poliedro se halla limitado por una série de polígonos que se llaman sus *caras*, y cuya reunion constituye su *superficie*. Los lados de estas caras son las *aristas* del poliedro, y sus *vértices* los de los ángulos poliedros. Finalmente, se llama *diagonal* la recta que une dos vértices no situados en una misma cara.

590. Un poliedro es *convexo* ó de *ángulos salientes*, cuando su superficie no puede ser cortada por una recta mas que en dos puntos; en caso contrario, se llama *cóncavo* ó de *ángulos entrantes*.

591. Se ha clasificado á los poliedros por el número de sus caras, llamando

tetráedro al que tiene 4 caras,
pentáedro............ ... 5
exáedro.................. 6
etc.

Casi nunca se lleva esta nomenclatura mas que hasta el poliedro de ocho caras, y para el *dodecáedro* é *icosáedro*, que son los de *doce* y *veinte*.

Observarémos que *el tetráedro es el mas sencillo de todos los poliedros;* porque para formar un ángulo poliedro se necesitan lo menos tres planos, y estos dejan un vacío que no se puede cerrar sino por un cuarto plano. Es claro que las caras del tetráedro son todas triángulos.

TEOREMA I.

592. *Dos tetráedros* SABC *y* S'A'B'C' (fig. 241) *son iguales cuando todas sus aristas lo son respectivamente, y las caras formadas por las aristas homólogas se hallan colocadas semejantemente.*

Se deduce de este enunciado, que el triedro S por ejemplo, es igual al S' (189 y 500), de modo que, superponiendo el uno al otro, tendrán los dos confundidos sus vértices, y por lo tanto, coincidirán perfectamente.

TEOREMA II.

593. *Dos tetráedros* SABC *y* S'A'B'C' (fig. 241) *son iguales cuando tienen un ángulo diedro igual* AB=A'B' *comprendido entre dos triángulos* SAB *y* S'A'B', ABC *y* A'B'C' *respectivamente iguales y semejantemente colocados.*

Esta demostracion es análoga á la del núm. 181.

TEOREMA III.

594. *Dos tetráedros* SABC *y* S'A'B'C' (fig. 241) *son iguales cuando tienen una cara igual* ABC=A'B'C', *adyacente á tres ángulos diedros respectivamente iguales, y cuyas caras homólogas estén semejantemente colocadas.*

La demostracion es semejante á la del núm. 183.

595. Los tetráedros son en el espacio, lo que los triángulos en un plano: así, lo mismo que se determina la posicion de un punto sobre un plano ligándole por medio de un triángulo á otros dos situados en el mismo plano, se fija en el espacio la posicion de un punto uniéndole por un tetráedro con otros tres puntos dados; de lo que se deduce que un poliedro cualquiera quedará determinado cuando se conozcan los vértices de tres de sus ángulos poliedros, y sus distancias á todos los demás (**592**); de manera que, designando por S el número total de sus vértices, exige su determinacion que se conozcan las $3(S-3)$ líneas que van á terminar en los vértices del triángulo que se haya escogido por base, y además los tres lados de este triángulo, lo que entre todo hace $3(S-3)+3=3(S-2)$ datos. Advertirémos, sin embargo, que Legendre ha reconocido que el número de estos datos puede ser mucho menor.

596. *Se llama* PIRÁMIDE *un poliedro en que una de las caras es un polígono cualquiera, y todas las demás triángulos que tienen su vértice en un mismo punto.* Así, SABCDE (fig. 242) es una pirámide cuya *base* es el polígono ABCDE, y el *vértice* S. La perpendicular SO, bajada desde el vértice á la base, es la *altura* de la pirámide.

Este cuerpo se llama *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*, etc., segun tenga por base un *triángulo*, un *cuadrilátero*, un *pentágono*, etc. Una pirámide triangular no es otra cosa que un tetráedro.

597. Si se considera que la superficie lateral de una pirámide puede engendrarse haciendo resbalar sobre el contorno de su base una recta sujeta á pasar por su vértice, se deducirá que un cono no es mas que una pirámide cuya base tiene un número infinito de lados infinitamente pequeños (**517**).

598. *Es* REGULAR *una pirámide cuando lo es el polígono que le sirve de base, siempre que además su vértice se proyecte en el centro comun de las circunferencias inscripta y circunscripta á esta base.*

599. Si se construyen dos conos que tengan estos círculos por bases, y por vértice comun el de la pirámide, claro es que el primero tocará á cada cara lateral de esta (**535**) segun la recta que va desde el vértice al medio de la base de esta cara, y que las aristas de la pirámide serán generatrices del segundo cono. Por consiguiente, se dice que estos conos están *inscripto* y *circunscripto* á la pirámide; y la generatriz del primero se llama su *apotema*.

Teorema IV.

600. *Cortando una pirámide por un plano paralelo á su base, las aristas y todas las líneas bajadas desde el vértice quedarán cortadas por este plano en partes proporcionales* (466); *la seccion será un polígono semejante á la base; y las áreas de estos dos polígonos serán proporcionales á los cuadrados de sus distancias al vértice.*

Sea la pirámide SABCDE (fig. 242) y A′B′C′D′E′ la seccion hecha en ella por un plano paralelo á la base.

1.° Voy á demostrar que el polígono A′B′C′D′E′ es semejante al ABCDE. En efecto, son equiángulos, porque sus ángulos tienen sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido (461); ademas, sus lados homólogos son proporcionales, porque de la semejanza de los triángulos SAB y SA′B′, SBC y SB′C′, SCD y SC′D′, se obtiene

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{SB}{SB'},$$

$$\frac{SB}{SB'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{SC}{SC'},$$

$$\frac{SC}{SC'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{SD}{SD'},$$

etc....................

de donde sale que

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\ldots\ldots$$

2.° La semejanza de los polígonos ABCDE y A′B′C′D′E′ da (400)

$$\frac{ABCDE}{A'B'C'D'E'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}=\frac{\overline{SB}^2}{\overline{SB'}^2}=\frac{\overline{SO}^2}{\overline{SO'}^2}$$

601. Corolario. *Si las bases de dos pirámides de la misma altura* SO *y* TH (fig. 242) *están situadas en un mismo plano, las áreas de las secciones* A′B′C′D′E′ y F′G′I′K′, *causadas en ellas por un plano paralelo á este, serán proporcionales á las de las bases* ABCDE y FGIK.

Con efecto, se tienen las dos proporciones

$$\frac{\text{ABCDE}}{\text{A}'\text{B}'\text{C}'\text{D}'\text{E}'}=\frac{\overline{\text{SO}}^2}{\overline{\text{SO}'}^2},$$

$$\frac{\text{FGIK}}{\text{F}'\text{G}'\text{I}'\text{K}'}=\frac{\overline{\text{TH}}^2}{\overline{\text{TH}'}^2},$$

mas, por hipótesis, SO $=$ TH y SO$'$ $=$ TH$'$; luego

$$\frac{\text{ABCDE}}{\text{A}'\text{B}'\text{C}'\text{D}'\text{E}'}=\frac{\text{FGIK}}{\text{F}'\text{G}'\text{I}'\text{K}'}.$$

602. *Se llama* PARALELEPÍPEDO *un cuerpo terminado por seis planos paralelos de dos en dos* (fig. 243).

Se deduce de esta definicion, que un paralelepípedo queda determinado cuando se conocen tres aristas contiguas y el ángulo triedro que forman; porque basta entonces, para construirle, tirar por el estremo de cada arista un plano paralelo al de las otras dos.

Teorema V.

603. *Las caras de un paralelepípedo son paralelógramos; las opuestas son iguales; los ángulos triedros opuestos simétricos, y las diagonales tiradas por los vértices de estos ángulos se cortan mútuamente en dos partes iguales en un mismo punto, que es el centro del paralelepípedo* (fig. 243).

1.° Cualquiera cara, tal como ABCD, es un paralelógramo, porque sus lados opuestos son paralelos, como intersecciones de dos planos paralelos con un tercero.

2.° Las dos caras opuestas ABCD y FGIK tienen sus lados AB y FG, BC y GI iguales y paralelos (196), y teniendo un ángulo igual (461) comprendido entre lados respectivamente iguales han de ser iguales (204).

3.° Si se prolongan las aristas del triedro C, se formará otro CB$'$D$'$I$'$ simétrico del CBID (501), pero que será igual al F, porque lo son sus caras una por una (461), y están semejantemente colocadas; luego el triedro CBID es el simétrico de F.

4.° Consideremos las dos diagonales BK y GD, que unen los vértices opuestos B y K, G y D. Es claro que, tirando las rectas BD y GK, se formará un paralelógramo BDGK (201), del que serán diagonales las BK y GD, por lo que se cortarán estas en partes iguales.

Lo mismo es evidentemente en cuanto á una cualquiera de estas diagonales y cada una de las otras AI y CF; luego las cuatro que unen los vértices opuestos se cortan en un mismo punto en dos partes iguales.

5.° Digo finalmente que su punto de seccion O es el centro del paralelepípedo. En efecto, tiremos por este punto una recta cualquiera MN, y sean M y N los en que corte á las caras opuestas BF y CK. Si hacemos pasar un plano por esta recta y la diagonal BK, sus trazas BM y KN sobre estas dos caras serán paralelas (**454**); por consiguiente, los triángulos OBM y OKN tendrán un lado igual BO = OK, adyacente á dos ángulos iguales uno por uno, á saber: BOM = KON (**50**) y OBM = OKN (**70**, **1.°**); luego son iguales, y OM = ON; por lo tanto, toda línea que pasando por el punto O, vaya á terminar en la superficie del paralelepípedo, queda dividida en este punto en dos partes iguales; luego es el centro de esta superficie (**203**).

604. Se llaman *bases* de un paralelepípedo á dos caras opuestas cualesquiera, y *altura* á la perpendicular bajada desde un punto cualquiera de la una sobre la otra.

605. Se dice que un *paralelepípedo* es *recto* cuando sus aristas laterales son perpendiculares á los planos de las bases. Si estas además fueran rectángulos, se le llamaria *paralelepípedo rectángulo*, porque todas sus caras lo serian entonces.

606. Si tres aristas contiguas de un paralelepípedo rectángulo son iguales, las seis caras serán cuadradas, y entonces recibe el nombre de *cubo*. Claro es que este cuerpo se puede inscribir y circunscribir á una esfera.

607. PRISMA *es un poliedro en que dos caras opuestas son polígonos cualesquiera* ABCDE *y* FGHIK (fig. 244), *que tienen sus lados iguales respectivamente y paralelos, y las otras* AG, BH..... *están determinadas por planos que pasan por los lados homólogos* AB *y* FG, BC *y* GH,.... *de estos polígonos.* Estas últimas caras son evidentemente paralelógramos (**201**), y se llaman las *caras laterales* del prisma, y *bases* los dos polígonos ABCDE y FGHIK. *Altura* es la distancia entre sus dos bases.

608. Un prisma es recto cuando sus aristas laterales AF, BG,... son perpendiculares á los planos de sus bases.

Es *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*, etc., cuando sus bases son *triángulos*, *cuadriláteros*, *pentágonos*, etc.

609. Cuando la base de un prisma sea un paralelógramo, sus caras laterales serán paralelas de dos en dos (461), de modo que este poliedro será un paralelepípedo (602).

610. Observando que se puede engendrar la superficie lateral de un prisma haciendo resbalar una de sus aristas laterales paralelamente á sí misma sobre el contorno de su base, se deducirá que un cilindro es un prisma cuya base tiene una infinidad de lados infinitamente pequeños (541).

611. *Un prisma es* REGULAR *cuando además de ser recto tiene por base un polígono regular.*

Dos cilindros rectos que tengan la misma altura que un prisma regular, y por bases los círculos inscripto ó circunscripto á la de este, se llaman *inscripto* ó *circunscripto* al prisma (548).

TEOREMA VI.

612. *Dos prismas* AH *y* A'H' (fig. 244) *son iguales cuando tienen un ángulo triedro comprendido entre tres caras respectivamente iguales y semejantemente colocadas*, por ejemplo :

$$ABCDE = A'B'C'D'E', \quad AK = A'K', \quad AG = A'G'.$$

De esta hipótesis se deduce inmediatamente que los triedros A y A' son iguales (500), y que por consiguiente, si se superpone la base ABCDE á la A'B'C'D'E' haciendo coincidir sus lados homólogos, coincidirán tambien las aristas AF y A'F', y por ser estas iguales, el punto F caerá sobre el F'; luego los paralelógramos AK y A'K', AG y A'G', se cubrirán exactamente; por consecuencia de esto sucederá lo mismo con las bases superiores, y tambien coincidirán las caras laterales BH y B'H', CI y C'I', etc., luego los dos prismas son iguales.

613. COROLARIO I. *Dos prismas rectos son iguales cuando lo son sus bases y alturas;* porque todas sus caras laterales son rectángulos iguales uno por uno. Si los triedros A y A', por ejemplo, tienen sus caras semejantemente colocadas, se habrá satisfecho á la condicion enunciada en el n.° 612, y serán iguales los prismas; si no las tienen así, serán iguales los triedros A y F', y por lo mismo tambien los prismas.

614. COROLARIO II. Dos paralelepípedos son iguales en las mismas circunstancias en que lo son dos prismas (603).

615. COROLARIO III. Un prisma queda determinado cuando se conoce su base y la direccion y longitud de una de sus aristas laterales.

Teorema VII.

616. *Todo poliedro se puede descomponer en pirámides, y aun en tetráedros.*

Distinguirémos dos casos : que el poliedro sea convexo ó cóncavo.

1.° Si el poliedro es convexo, se harán pasar planos por un vértice cualquiera A y cada una de las aristas de las caras no adyacentes á este vértice, y quedará así descompuesto en tantas pirámides como caras tenga.

Hecho esto, si se divide la base de cada pirámide en triángulos, y se llèvan planos por cada línea de division y el vértice comun, se descompondrá cada pirámide, y por lo tanto el poliedro propuesto, en tetráedros.

2.° Si es cóncavo, se le dividirá inmediatamente en pirámides, y por consiguiente en tetráedros, siempre que desde un punto tomado en su interior se puedan tirar á todos sus vértices rectas que no atraviesen á ninguna de sus caras. Si esto no es posible, tírese por el vértice de uno de los ángulos entrantes un plano que pase entre las aristas de este ángulo, y quedará el poliedro dividido en dos, que tomados juntos, tendrán un ángulo entrante menos que el primero. Operando de la misma manera sobre cada uno de estos, y así sucesivamente, se llegará á descomponer el poliedro propuesto en un cierto número de otros convexos, y nos encontrarémos en el primer caso.

Teorema VIII.

617. *En todo poliedro se verifica que, sumando el número* C *de sus caras con el* S *de sus vértices, resulta un número que escede en dos unidades al* A *de sus aristas*, es decir que se verifica que $C+S-A=2$ [1].

---

[1] He observado que se hace difícil á todos esta demostracion que da Cirodde del importante teorema que nos ocupa, y que es debido á *Euler*. Por esta razon, y conforme con las observaciones de varios de mis comprofesores, entre ellos el ya citado Sr. Saavedra, me parece conveniente modificar aquella en los términos que siguen.

Cuando de un poliedro cualquiera se quita una cara, el número de estas disminuye en una unidad, pero subsiste el mismo el de vértices y el de aristas. Si del poliedro resultante se quita otra cara adyacente á la ya quitada, el trozo resultante de poliedro tiene una arista menos y dos caras tambien menos que el poliedro dado, pero el mismo número de vértices; de modo que llamando C_1 al número de sus caras, S_1 al de sus vértices y A_1

Con efecto, quitando del poliedro de que se trate una de sus caras, quedará otro poliedro *abierto*, que tendrá una cara menos que el primero, pero igual número de ángulos y de aristas. Suprimiendo en este poliedro abierto una cara, que sea adyacente á la primera que se quitó, es claro que lo que se quita es un polígono abierto que necesariamente tendrá un ángulo menos que lados; luego designando por s el número de vértices que se haya quitado, por C′, S′ y A′ los respectivos de caras, vértices y aristas del poliedro resultante, se tendrá

$$C'=C-2,\quad S'=S-s,\quad y\ A'=A-s-1:$$

---

al de sus aristas, y C, S y A al de caras, vértices y aristas del poliedro primitivo, será

$$C_1=C-2,\quad S_1=S,\quad y\ A_1=A-1$$

por lo que sumando las dos primeras igualdades, y restando de la suma la tercera, se tendrá

$$C_1+S_1-A_1=C-2+S-A+1=C-1+S-A.$$

Quitando ahora otra cara adyacente á la última que hemos quitado, podrán suceder dos casos: ó esta, la anterior y otra de las quitadas son las únicas que concurren en uno de los estremos de la arista que acabamos de quitar, ó concurren en dicho punto con otras caras. En el primer caso, al quitar la cara de que ahora nos ocupamos, desaparece el vértice que formaba con las dos ya quitadas, y desaparecen tambien las dos aristas que ella formaba con estas últimas: luego llamando C_2, S_2 y A_2 á los respectivos números de caras, vértices y aristas del trozo de poliedro que ahora resulta, tendrémos las igualdades

$$C_2=C_1-1=C-3,\quad S_2=S-1\quad y\quad A_2=A_1-2=A-3;$$

de modo que resultará

$$C_2+S_2-A_2=C-1+S-A.$$

En el segundo caso no desaparece mas que una arista, y queda el mismo número de vértices que en el poliedro primitivo: luego será

$$C_2=C-3,\quad S_2=S\quad y\quad A_2=A-2$$

y por consiguiente

$$C_2+S_2-A_2=C-1+S-A.$$

Esto nos hace ver que quitando de un trozo de poliedro una cara, ya concurra esta con las anteriormente quitadas en un ángulo triedro ó en uno poliedro, la suma de las caras y vértices del nuevo trozo de poliedro escede al número de aristas en la cantidad constante $C-1+S-A$. Lo mismo sucederá quitando del nuevo trozo otra cara mas; pero si queremos no dejar duda alguna demostrarémos que, si despues de haber quitado de un poliedro cualquiera n caras, se verifica que

$$C_n+S_n-A_n=C-1+S-A\quad [1],$$

quitando una cara mas, tambien se verificará que

$$C_{n+1}+S_{n+1}-A_{n+1}=C-1+S-A.$$

En efecto, observemos lo que sucede en el segundo miembro de la igualdad [1], cuando de modo que, sumando las dos primeras igualdades, y restando de la suma la tercera, quedará

$$C'+S'-A'=(C-1)+S-A.$$

Esta igualdad manifiesta que al quitar de un poliedro *abierto* una cara, el esceso que tiene la suma del número de caras y de vértices sobre el de las aristas, es una cantidad constante; por consiguiente, la misma será cuando se haya suprimido una segunda cara, otra tercera, y así sucesivamente hasta reducir el poliedro á un simple polígono. Mas en este caso la diferencia de que se trata es evidentemente igual á la unidad, pues en todo polígono hay tantos ángulos como lados: luego $C-1+S-A=1$, de donde sale $C+S-A=2$, que es lo que se trataba de demostrar.

* **618.** Escolio. No es otra cosa este teorema que un caso particular de otro debido á M. Cauchy, y que se demostraria del mismo modo (*Anales de matemáticas* y *Diario de la Escuela politécnica*).

* **619.** Corolario. *La suma de los ángulos que hay en todas las caras de un poliedro es igual á tantas veces cuatro rectos como unidades vale el esceso del número de aristas sobre el de caras, ó á tantas veces cuatro rectos como vértices hay en el poliedro menos dos.*

Como sabemos que la suma de los ángulos de un polígono es igual á tantas veces dos rectos como lados tiene este, menos *cuatro* rectos, la suma V de los ángulos de todas las caras de un poliedro

---

del trozo cuyo número de caras hemos llamado C_n, el de vértices S_n, y A_n el de aristas, se quita otra cara mas, adyacente á alguna ó algunas de las ya quitadas.

Es evidente que al quitar esta cara se perderá precisamente un lado ó arista mas que vértices, de modo que si se llama s el número de vértices que por esta supresion se pierden, $s+1$ será él de aristas; por lo tanto

$$C_{n+1}=C_n-1,\quad S_{n+1}=S_n-s,\quad A_{n+1}=A_n-s-1$$

de donde resulta

$$C_{n+1}+S_{n+1}-A_{n+1}=C_n-1+S_n-s-A_n+s+1=C_n+S_n-A_n,$$

y segun la igualdad (1)

$$C_{n+1}+S_{n+1}-A_{n+1}=C-1+S-A.$$

En virtud de todo esto, la cantidad $C-1+S-A$ permanece constante, cualquiera que sea el número de caras que se hayan quitado del poliedro que se dió, y subsistirá la misma cuando el trozo á que hayamos llegado sea una sola cara, es decir, un simple polígono; pero en este caso el número de caras es 1 y el de vértices igual al de sus lados; luego

$$C-1+S-A=1,\quad ó\ sea\quad C+S-A=2.$$

(*Nota del Traductor*).

será igual á tantas veces dos rectos como lados componen entre todas las caras, menos tantas veces cuatro rectos como caras haya. Mas como cada arista pertenece á dos caras, se echa de ver que, contando el número de los lados de todas las caras del poliedro, resulta un número doble que el de aristas; luego la espresion de V es

$$V=2.2A-4C=4(A-C)=4(S-2),$$

segun el teorema de Euler, y como queriamos demostrar.

* 620. Mr. Gergonne ha demostrado en los *Anales de matemáticas*, que, á escepcion de algunos teoremas, tales como el de Euler, en que el número de caras y el de vértices figuran de la misma manera, no hay ninguno de este género à que no deba corresponder otro que necesariamente se deduzca de él, con solo permutar entre sí las palabras *caras* y *vértices*. Vamos á indicar ligeramente la marcha que conduce á estos teoremas.

Sean c, d, e, f, g, h..... el número de caras que tengan 3, 4, 5, 6, 7, 8..... lados, y c', d', e', f', g', h'..... el número de ángulos poliedros que tengan 3, 4, 5, 6, 7, 8..... caras.

Como cada arista pertenece á dos caras y termina en dos vértices, se tendrá

$$2A=3c+4d+5e+6f+\ldots,\quad 2A=3c'+4d'+5e'+6f'+\ldots$$

Pero restando de 2A, $2c+4d+4e+6f+6g+8h+\ldots$, el resto $c+e+g+\ldots..$ será un número par. Lo mismo es evidentemente $c'+e'+g'+\ldots..$; luego

Las CARAS *de un número impar de lados siempre son en número par.*	*Los vértices de un número impar de aristas siempre son en número par.*

Por otra parte

$$C=c+d+e+f+\ldots,\quad S=c'+d'+e'+f'+\ldots;$$

luego, sustituyendo estos valores de C, S y A en la ecuacion $C+S=A+2$, despues de haber multiplicado sus dos términos por 2, resultará

$$[1]\quad \begin{cases}2(c+d+e+f+\ldots)=4+c'+2d'+3e'+4f'+\ldots,\\ 2(c'+d'+e'+f'+\ldots)=4+c+2d+3e+4f+\ldots,\end{cases}$$

ecuaciones que se cambian una en otra con solo permutar las letras c y c', d y d', etc.; luego espresan teoremas que se reemplazan uno tante de los vértices de cada una de las caras (558); luego la esfera que se describa con el radio OA quedará circunscripta al poliedro.

640. Corolario I. *Todo poliedro regular puede dividirse en tantas pirámides regulares iguales como caras tenga*; pues bastará para conseguirlo, con hacer que pasen planos por el centro O y cada una de las aristas.

641. Corolario II. Recíprocamente *se dice que un poliedro es regular, cuando puede descomponerse en pirámides regulares iguales tirando planos por cada arista y por un punto tomado en la parte interior.* En primer lugar, todas sus caras son polígonos regulares iguales; además, todos sus ángulos diedros son iguales; porque el BACD, por ejemplo, es el doble del ángulo diedro de la base de una cualquiera de estas pirámides.

Teorema.

642. *No puede haber mas que cinco clases de poliedros regulares*

Hemos visto (497) que la suma de las caras de un ángulo poliedro convexo es siempre menor que cuatro rectos. Por consiguiente, siendo todas sus caras iguales, su número será necesariamente menor que el cociente que se obtiene dividiendo cuatro rectos por el valor de una cara. De aquí se sigue, teniendo además presente que los ángulos de un triángulo equilátero, de un cuadrado, de un pentágono y de un exágono regular valen respectivamente (siendo la unidad angular el ángulo recto),

$$\tfrac{2}{3},\ 1,\ \tfrac{6}{5},\ \text{y}\ \tfrac{4}{3}.$$

1.° Que si las caras del poliedro son triángulos equiláteros, el número de estos reunidos alrededor de un mismo vértice será menor que $\frac{4}{\frac{2}{3}}=6$. Luego cada ángulo poliedro no podrá estar formado mas que con *tres*, *cuatro* ó *cinco* ángulos de triángulo equilátero.

2.° Que si las caras son cuadrados, no se podrán reunir mas que tres para formar cada ángulo poliedro.

3.° Que cuando sean pentágonos el número de polígonos reunidos alrededor de un mismo vértice será menor que $\frac{4}{\frac{6}{5}}=\frac{10}{3}<4$; luego no podrá formarse cada ángulo poliedro mas que con *tres* ángulos de pentágono.

4.° Que las caras de un poliedro regular no pueden tener mas de *cinco* lados; porque si quisiéramos usar aunque no fuese mas que exágonos, hallaríamos que el número de caras de cada uno de sus ángulos deberia ser menor que $\frac{4}{\frac{4}{3}}=3$, lo que es absurdo.

Luego *no puede haber mas que* CINCO *clases de poliedros regulares:* TRES *que se forman reuniendo alrededor de un mismo vértice* TRES, CUATRO *ó* CINCO TRIÁNGULOS EQUILÁTEROS; *y* DOS *cuyos ángulos poliedros resultan de la reunion de* TRES CUADRADOS *ó de* TRES PENTÁGONOS.

Veamos ahora cuántas caras tiene cada uno de ellos.

Llamando l al número de lados de cada una, el total de lados que compondrán entre todas las caras será Cl, conservando la notacion del n.° 617; mas como cada arista pertenece á dos caras á la vez, se sigue que el número de aristas del poliedro es solamente la mitad de Cl, y que así, $Cl=2A$. Del mismo modo, llamando a al número de aristas que concurran en cada vértice del poliedro, se verá que $Sa=2A$. Por lo tanto, para determinar A, C y S tenemos las res ecuaciones

$$Cl=2A,\quad Sa=2A,\quad C+S-A=2,$$

de las que se saca fácilmente

$$C=\frac{4a}{2(l+a)-la}.$$

Pero segun antes hemos visto, los valores que l y a pueden únicamente tener en los cinco poliedros regulares son

$$\begin{array}{l} l=3,\quad 3,\quad 3,\quad 4,\quad 5, \\ a=3,\quad 4,\quad 5,\quad 3,\quad 3, \end{array}$$

y en virtud de esto la fórmula precedente dará

$$C=4,\quad 8,\ 20,\quad 6,\ 12.$$

Por lo tanto, los cinco poliedros regulares de que nos hemos ocupado mas arriba, son el tetráedro, el octáedro, el icosáedro, el exáedro y el dodecáedro. Volverémos á hablar de ellos despues que resolvamos el siguiente

PROBLEMA I.

*643. *Construir un poliedro regular, cuya especie se determine, conociendo su arista.*

Si existe un poliedro regular de esta especie se le puede descomponer en tantas pirámides regulares iguales como caras tenga, y recíprocamente (640 y 641); y como el lado de la base de cada una se da por el enunciado del problema, quedarán determinadas estas pirámides integrantes, cuando se conozcan los ángulos diedros que forman sus caras laterales [1]. Concibamos una esfera cuyo centro se halle en el vértice de una de estas pirámides, y las caras de la última interceptarán sobre la esfera un polígono esférico, qua tendrá por ángulos los mismos diedros formados por estas caras; luego, si representamos por x el valor de uno de estos, la espresion del área del polígono esférico será $lx-2(l-2)$, tomando por unidad el área del triángulo trirectángulo (664); por consiguiente, la suma de las áreas de los polígonos que interceptan sobre la esfera los ángulos del vértice de todas las pirámides, será $\{lx-2(l-2)\}C$. Pero esta suma es precisamente la de la esfera, que vale 8 veces la del triángulo trirectángulo; luego

$$\{lx-2(l-2)\}C=8\text{, de donde } x=\frac{8+2(l-2)C}{Cl}.$$

Sustituyendo por C y l sus valores respectivos, hallarémos que la inclinacion de dos caras adyacentes de una de las pirámides integrantes

del tetráedro es $\frac{4}{3}$,
del octáedro es 1,
del icosáedro es $\frac{4}{5}$,
del exáedro es $\frac{4}{3}$,
del dodecáedro es $\frac{4}{3}$.

En consecuencia, si queremos construir el dodecáedro por ejemplo, formarémos una pirámide pentagonal regular que tenga por lado la arista que se dió, y en la que la inclinacion de dos caras adyacentes sea los $\frac{4}{3}$ de un recto: reunirémos luego *doce* de estas pirámides, y con ellas quedará cerrado el espacio que hay alrededor del vértice comun, y el problema resuelto (641). Del mismo modo se podrán construir los otros cuatro poliedros regulares, sin embargo de que, para tener el exáedro, será mas sencillo construir un

[1] En efecto, cada ángulo triedro de la base es isóedro, y se conoce en él un diedro formado por las dos caras iguales y la cara opuesta. Para obtener estas caras, no hay mas que invertir la construccion que se hace para determinar el ángulo diedro opuesto á la cara del desarrollo cuando se conocen las tres caras. (Véase la *Geometría descriptiva*).

paralelepípedo rectángulo que tenga las tres aristas contiguas iguales á la línea dada [1].

LIBRO NOVENO.

ÁREAS DE LOS CUERPOS.

CAPÍTULO PRIMERO.

ÁREAS DE LOS CUERPOS.

644. La determinacion del *área de un poliedro cualquiera* no puede ofrecer dificultad, porque no es mas que la suma de las de cada una de sus caras, y esto ya lo sabemos hacer. Solamente observarémos que las áreas de las superficies laterales de la pirámide regular y del prisma, se pueden obtener por una simple multiplicacion (números **645** y **649**).

Teorema I.

645. *El área de la superficie lateral de una pirámide regular* (**598**) *es igual á la mitad del producto del perímetro de su base por su apotema.*

En efecto, cada una de las caras de esta pirámide es un triángulo isósceles, que tiene por medida el producto de uno de los lados de la base de la pirámide multiplicado por la mitad del apotema (**599**); por consiguiente, al sumar las áreas de todas estas caras, se podrá sacar como factor comun la mitad del apotema, y se obtendrá de

---

[1] Si suponemos que el denominador del valor de C (**642**) sea cero, tendrémos la ecuacion $2(l+a)=la$, que solo puede satisfacerse por los tres pares de valores

$$l=3,\quad l=4,\quad l=6;$$
$$a=6,\quad a=4,\quad a=3.$$

Así es que *una esfera puede ser considerada bajo tres puntos de vista como un poliedro regular de un número infinito de caras infinitamente pequeñas, formado por la reunion en un mismo punto : 1.° de triángulos reunidos de* SEIS *en* SEIS; *2.° de cuadrados de* CUATRO *en* CUATRO; *3.° de exágonos de* TRES *en* TRES.

este modo por medida de la superficie lateral de la pirámide el perímetro de la base multiplicado por la mitad del apotema.

646. Inscribiendo un polígono regular en el círculo que sirve de base á un cono recto, y haciendo pasar planos por el vértice de este y por cada uno de los lados del polígono, se formará una pirámide regular inscripta en el cono. Suponiendo que se vaya duplicando indefinidamente el número de lados del polígono, se irá obteniendo una série de pirámides regulares inscriptas en el cono, en cada una de las cuales el número de caras será doble cada vez; sus superficies laterales, menores siempre que la lateral del cono, irán creciendo sucesivamente y sin cesar, aproximándose cada vez mas á esta, á proporcion que sea mas considerable el número de lados del polígono [1]. Esto nos manifiesta que el cono es el límite hácia el cual convergen estas pirámides sucesivas, límite á que llegarán cuando se haya hecho infinito el número de lados del polígono, en cuyo caso este se confundirá con la base del cono. Luego un cono recto circular puede considerarse como una pirámide regular *infinitesimal*, es decir, como una pirámide regular que tiene un número infinito de caras infinitamente pequeñas; y es claro que, considerado bajo este punto de vista, tiene que gozar de todas las propiedades que se hayan demostrado para una pirámide regular, que sean independientes del número y magnitud de sus caras.

A las mismas consecuencias llegaríamos en el cono, partiendo de una pirámide circunscripta á este, y duplicando indefinidamente el número de sus caras.

---

[1] En efecto, *toda superficie convexa es menor que cualquiera otra que la envuelve, apoyándose en el mismo contorno ó envolviéndola enteramente*. Esta proposicion, que puede admitirse como evidente, es consecuencia de los tres lemas que siguen:

LEMA I.

El área de la proyeccion de un triángulo sobre un plano que no le sea paralelo, es menor que la del triángulo.

Podemos suponer que el plano de proyeccion pase por uno de los vértices del triángulo, porque las proyecciones de una misma figura sobre dos planos paralelos son evidentemente iguales. Entendido esto, pueden presentarse dos casos: que uno de los lados del triángulo esté en el plano de proyeccion ó que no lo esté.

En el primer caso, siendo A′BC la proyeccion del triángulo ABC (fig. 253), tirando la A′I perpendicularmente á la BC, y uniendo A con I, se tendrá la altura del triángulo ABC; pero $A'I < AI$; luego $A'BC < ABC$ (370).

En el segundo, prolongo el lado AC (fig. 254) hasta su encuentro con el plano de proyeccion en D, y entonces puedo mirar el triángulo ABC como la diferencia de los dos ABD y BCD, que tienen un lado en el plano de proyeccion; de suerte que su proyeccion

647. De las consideraciones que preceden podemos deducir el siguiente

TEOREMA II.

El área de la superficie curva de un cono circular recto es igual á la mitad del producto de la circunferencia de su base multiplicada por

---

BA′C′ será la diferencia de las de dichos triángulos. Pero si de los puntos A′ y C′ se bajan perpendiculares sobre BD y se tiran AK y CI, estas rectas serán las alturas de los triángulos correspondientes; luego

$$\frac{BAD}{BA'D}=\frac{AK}{A'K},$$

$$\frac{BCD}{BC'D}=\frac{CI}{C'I}.$$

Mas siendo equiángulos los triángulos AA′K y CC′I, será

$$\frac{BAD}{BA'D}=\frac{BCD}{BC'D}=\frac{AK}{A'K},$$

y por lo tanto

$$\frac{BAC}{BA'C'}=\frac{AK}{A'K}.$$

y finalmente, será $BA'C' < BAC$.

Si el lado AC fuera paralelo al plano de proyeccion, se haria pasar este por dicho lado, y nos hallaríamos en el primer caso.

LEMA II.

Toda superficie plana ABCDE (fig. 255) *es menor que cualquiera poliedral cerrada que esté terminada en el mismo contorno.*

Las proyecciones sobre el plano ABCDE de las caras de la superficie poliedral propuesta que no sean paralelas á este plano, son menores que dichas caras (*lema* I), y la suma de dichas proyecciones es por lo menos igual á ABCDE. (La figura representa la interseccion de GHIKLMN de la superficie envolvente con un plano perpendicular á ABCDE).

COROLARIO. De aqui y de las consideraciones hechas en el n°. 517 se sigue que *toda superficie plana es menor que cualquiera otra terminada en el mismo contorno.*

LEMA III.

Toda superficie poliedral convexa es menor que cualquiera otra poliedral que la envuelva, ya sea apoyándose en el mismo contorno, ó envolviéndola completamente.

Construyamos, con efecto, sobre cada una de las caras de la superficie convexa un prisma recto, esterior á esta superficie. Podrá mirarse cada una de las caras de la primera como la proyeccion sobre su plano de la porcion de superficie envolvente comprendida entre la superficie lateral del prisma correspondiente. Pero estos prismas no pueden cortarse unos con otros, porque la superficie sobre que descansan es convexa; luego se debe deducir del lema I, que esta superficie es menor que la que la envuelve. (La figura 256 representa la construccion análoga ejecutada con dos líneas quebradas y situadas en un mismo plano).

su generatriz (¹); es decir, que

$$C = \tfrac{1}{2} \text{ circunf.}^a\ R \times G,$$

designando por R, G y C el radio de la base, la generatriz y el área lateral del cono (²).

Teorema III.

648. *El área de la superficie curva de un tronco de cono recto* ABA′B′ (fig. 231) *de bases paralelas es igual al producto de la semi-suma de las circunferencias de sus bases por su generatriz, ó al producto de esta generatriz por la circunferencia de la seccion hecha á igual distancia de las dos bases.*

Cortemos el cono por un plano SAB que pase por el eje, y tiremos en este plano y por el punto B la perpendicular BC á la generatriz SB, é igual á la circunferencia OB rectificada; unamos S con C, y tiremos la B′C′ paralela á BC: digo que esta perpendicular será igual á la circunferencia O′B′. Observarémos, para demostrarlo, que las dos circunferencias OB y O′B′ son proporcionales á sus radios, y por consiguiente, á las rectas SB y S′B′; y como estas últimas guardan entre sí la misma razon que BC con B′C′, tendrémos

$$\frac{\text{circunf.}^a\ OB}{\text{circunf.}^a\ O'B'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

Mas BC = circunf.ª OB; luego B′C′ = circunf.ª O′B′. Por lo tanto, el triángulo SB′C′ es equivalente á la superficie curva del cono SO′A′B′ (647): y como el triángulo SBC es tambien equivalente á la superficie lateral del cono SOAB, se deduce que el área de la superficie curva del tronco de cono ABA′B′ es igual á la del trapecio BC′; luego el área de este tronco tiene por medida $\tfrac{1}{2}(BC + B'C').BB'$, ó lo que viene á ser lo mismo,

$$\tfrac{1}{2}(\text{circunf.}^a\ OB + \text{circunf.}^a\ O'B').BB',$$

conforme con la primera parte del enunciado.

(¹) Véase el *Apéndice* II colocado al fin de este tomo.

(²) Tambien resulta esta proposicion de que el desarrollo de la superficie curva de un cono recto es un sector que tiene por radio la generatriz de esta superficie, y por base un arco de igual longitud que la circunferencia de la base de este cono (538).

Si por el medio de BB′ se hace pasar un plano A″B″ paralelo á las bases del tronco de cono, y una paralela B″C″ á las del trapecio, se verá fácilmente que B″C″ = circunf.ª O″B″, y como el trapecio BC′ tiene por medida B″C″.BB′, se deduce tambien que *el área de la superficie convexa del tronco de cono es igual á circunf.ª* O″B″.BB′, lo que concuerda con el enunciado.

Teorema IV.

649. *El área de la superficie lateral de un prisma cualquiera es igual al producto de una de sus aristas multiplicada por el perímetro de la* SECCION RECTA, es decir, de la seccion verificada en este prisma por un plano perpendicular á sus aristas.

Con efecto, cada lado de la seccion recta puede tomarse como la altura de la cara correspondiente del prisma, contando por bases de esta cara las dos aristas que la limitan lateralmente; luego, etc.

Si el prisma es *recto*, se podrá decir que *el área de su superficie lateral es igual al producto de su base por su altura.*

650. Inscribiendo y circunscribiendo un polígono á la base de un cilindro cualquiera, y razonando como en el núm. 646, se verá que *un cilindro cualquiera puede considerarse como un prisma infinitesimal,* y gozará, por consiguiente, de todas las propiedades que se hayan demostrado para los prismas, con tal que sean independientes del número y magnitud de sus caras. Dedúcese de aquí el siguiente

Teorema V.

651. *El área de la superficie curva de un cilindro cualquiera es igual al producto de su generatriz por el perímetro de la seccion recta* [1]; y

El área de la superficie curva de un cilindro circular recto es igual á la circunferencia de su base multiplicada por la altura [2].

---

[1] Esta proposicion resulta tambien, en el caso del cilindro recto, de que el desarrollo de la superficie curva de semejante cilindro es un rectángulo de la misma altura que aquel, y cuya base es de la misma longitud que el perímetro de la del cilindro (513).

[2] Véase el *Apéndice* II.

TEOREMA VI.

652. *El área de la superficie curva de un tronco de cilindro circular recto tiene por medida la circunferencia de su base multiplicada por el eje.*

Porque prolongando el eje de este tronco una cantidad igual á sí mismo, y haciendo pasar por su estremidad un plano paralelo á la base inferior, se formará un cilindro recto que estará dividido por el plano de la base superior en dos partes superponibles; luego, etc.

TEOREMA VII.

653. *El área de la superficie engendrada por la base* BC (fig. 257) *de un triángulo isósceles* BAC, *que gira alrededor de un eje fijo* XY, *tirado en su plano por el vértice* A, *es igual al producto de la circunferencia que tiene por radio la altura* AM *de este triángulo, multiplicada por la proyeccion* B′C′ *de su base sobre el eje de revolucion.*

Es claro que en el movimiento de rotacion del triángulo ABC alrededor del eje XY, que suponemos esterior al triángulo, el trapecio BC′ engendrará un tronco de cono, de suerte que la superficie curva producida por BC es precisamente la de este tronco; así, su área A está espresada por (648)

$$A = 2\pi . MM' . BC. \qquad [1]$$

Mas si tiramos por el punto C la CI paralela al eje de revolucion, formarémos el triángulo BCI semejante al AMM′ (280); luego sus lados homólogos darán la proporcion (281)

$$\frac{AM}{BC} = \frac{MM'}{CI \text{ ó } B'C'};$$

de la cual sale $MM'.BC = AM.B'C'$; de modo que, sustituyendo en [1], se tendrá

$$A = 2\pi . AM . B'C'.$$

Esta medida es independiente de la magnitud del ángulo CAY; luego subsistirá la misma, cuando el eje XY coincida con el lado AC, ó cuando sea paralelo á la base BC; y el teorema queda demostrado en todos los casos (651).

Teorema VIII.

654. *El área de la superficie engendrada por una línea quebrada regular* ABCDE (fig. 258) *que gira alrededor de un eje tirado en su plano por el centro de la circunferencia inscripta, es igual al producto de seta circunferencia por la proyeccion* A′E′ *de la generatriz sobre el eje de revolucion.*

Porque tirando los radios OA, OB, OC..... formarémos una série de triángulos isósceles, que girará cada uno alrededor de un eje que pasa por su vértice; y no hay mas que hallar el área engendrada por la base de cada uno de estos triángulos, apoyándose en el teorema VII, y sacar por factor comun la circunferencia cuyo radio es la altura de cada uno de ellos.

Teorema IX.

655. *El área de un casquete esférico tiene por medida el producto de la circunferencia de un círculo máximo por su altura*; es decir, que

$$C = 2\pi R h,$$

llamando R, h y C al radio, altura y área de este casquete.

Efectivamente, haciendo girar un sector circular alrededor de uno de sus radios estremos, su base engendrará un casquete esférico; pero puede mirarse esta base como una línea quebrada regular cuyos lados sean infinitamente pequeños; luego, etc. (1).

656. Corolario I. *El área de una zona cualquiera* NEBC (fig. 259) *es tambien igual á la circunferencia de un círculo máximo multiplicada por su altura* CN; porque es la diferencia de las áreas de los dos casquetes ABC y AEN, y así tendrá por medida la circunferencia de un círculo máximo multiplicada por (AC—AN); es decir, por NC.

657. Corolario II. *En una misma esfera ó en esferas iguales, las areas de los casquetes y de las zonas son proporcionales á sus alturas.*

658. Corolario III. *El área de la esfera es igual á la circunfe-*

(1) Observando (fig. 259) que $\overline{AB}^2 = 2AO \cdot AC$, se verá que *el área del casquete* ABC *tiene por medida* $\pi\,\overline{AB}^2$; es decir, que *es igual á la de un círculo que tenga por radio la cuerda que subtiende al arco generador.*

rencia de un círculo máximo multiplicada por su diámetro [1], porque puede mirársela como un casquete cuya altura es igual á este diámetro.

Como el diámetro es el cuádruplo de la mitad del radio, se sigue del núm. 379 que *el área de la esfera es cuádrupla de la de un círculo máximo* [2].

TEOREMA X.

659. *El área del huso* CNDGC (fig. 234) *es igual á la cuarta parte de la de la esfera, multiplicada por el ángulo diedro formado por los planos de las dos semi-circunferencias que le terminan.*

Describamos, con efecto, desde el punto C como polo, y con una abertura de compás igual á un cuadrante, la circunferencia de círculo máximo FNGF, y se verá fácilmente, razonando como en el número 109, que *el área* H *del huso* ES *á la* S *de la esfera* COMO *el arco* NG ES *á la circunferencia* ON; porque dos husos que interceptan sobre esta circunferencia arcos iguales, son evidentemente superponibles; y así

$$\frac{H}{S}=\frac{NG}{\text{circunf.}^{a}\ ON}\ \text{de donde}\ H=S.\frac{NG}{\text{circunf.}^{a}\ ON}.$$

Pero en lugar de la razon del arco NG á la circunferencia ON, se puede sustituir la del ángulo diedro GCDN á cuatro diedros rectos (487); luego si tomamos por unidad el ángulo diedro recto, y representamos por A la medida del GCDN, se tendrá

$$H=S.\frac{A}{4},\ \text{ó}\ H=\frac{S}{4}.A,$$

como se queria demostrar.

660. ESCOLIO. *Si se toma por unidad el triángulo esférico trirectángulo, valdrá el área de la esfera ocho unidades*; de modo que la del huso se reducirá á $H=2A$; es decir, que entonces *el área del huso tendrá por medida el doble de su ángulo.*

---

[1] Así, *el área de la esfera es los $\frac{4}{6}$ ó sea los $\frac{2}{3}$ de la superficie total del cilindro circunscripto*; porque esta última vale seis veces la de su base; esto es, seis veces la de un círculo máximo de la esfera.

[2] Por lo tanto, *el área de la esfera es igual á la que tenga la superficie lateral del cilindro circunscripto.*

Observando que S=circunf.ª ON . CD (658), se tendrá H=NG.CD; por lo que tambien puede decirse que *el área del huso tiene por medida el producto del diámetro por el arco comprendido entre sus lados y descrito desde su vértice como polo.*

Teorema XI.

661. *Dos triángulos esféricos simétricos son equivalentes.*

Sean ABC y A′B′C′ (fig. 260) los dos triángulos propuestos: los rectilíneos formados por las cuerdas que subtienden á sus lados serán equiláteros entre sí, y se los podrá hacer coincidir; por consiguiente, los polos P y P′ de los círculos circunscriptos á estos triángulos [1] estarán situados del mismo modo para los dos esféricos propuestos, solo que el uno quedará debajo, y el otro por la parte superior del plano comun, á iguales distancias de las dos circunferencias. Así, uniendo estos polos con los vértices de los dos triángulos ABC y A′B′C′ por medio de arcos de círculo máximo, serán iguales todos los seis PA, PB, PC, P′A′, P′B′, P′C′. Por lo tanto, los triángulos PAB y P′A′B′, PAC y P′A′C′, PBC y P′B′C′ tienen iguales uno á uno sus tres lados, y siendo isósceles, son superponibles; luego las áreas de los triángulos propuestos están formadas de un mismo modo con las de los auxiliares, y por lo tanto serán iguales.

Teorema XII.

662. *El área de un triángulo esférico es igual á la diferencia entre la suma de sus ángulos y dos rectos, siempre que se tome por unidad la del triángulo trirectángulo.*

Terminemos las circunferencias de que forman parte los tres lados del triángulo ABC (fig. 236), y verémos que entre este y el BCA′ componen el huso ACA′BA, y que así (660)

$$ABC+BCA'=2A.$$

Igualmente $$ABC+ACB'=2B.$$

La suma de los dos triángulos A′B′C y A′B′C′ compone el huso

[1] Son círculos menores; porque si fuesen máximos, los tres lados de cada uno de los triángulos se hallarian en un mismo plano, y estos se reducirian á círculos.

CA'C'B'C; pero el A'B'C' es equivalente (661) a su simétrico ABC (1);

luego $$ABC + A'B'C = 2C.$$

Si ahora se suman estas tres ecuaciones, se verá que la suma de sus primeros miembros se compone de dos veces el triángulo ABC, y de los cuatro triángulos ABC, BCA', ACB' y A'B'C, que forman el hemisferio CABA'B', el cual vale cuatro triángulos trirectángulos, es decir, *cuatro unidades;* luego se tendrá

$$2ABC + 4 = 2A + 2B + 2C,$$

ó bien $$ABC = A + B + C - 2.$$

Así, *un triángulo esférico tiene por medida el esceso de la suma de sus ángulos sobre dos rectos*, es decir la relacion de este esceso con el ángulo recto.

EJEMPLO. *¿Cuál es el área de un triángulo cuyos ángulos valen respectivamente* 120° 10', 95° y 48°? El esceso de la suma de las medidas de estos ángulos sobre dos rectos es 83° 10'; por lo tanto es necesario tomar la relacion entre este arco y la medida de un recto, es decir, y 90°, lo que se hará convirtiendo estos dos números en minutos; y se encontrará de este modo que el triángulo propuesto es los $\frac{4990}{5400} = \frac{499}{540}$ del triángulo trirectángulo.

663. COROLARIO. Observando que el triángulo trirectángulo es la octava parte de la superficie esférica, se podrá decir *que el área de un triángulo esférico es igual á la octava parte de la de la esfera, multiplicada por el esceso de la suma de sus ángulos sobre dos rectos.*

TEOREMA XIII.

664. *El área de un polígono esférico convexo, cuyos lados sean todos arcos de círculo máximo, es igual á la suma de sus ángulos disminuida de tantas veces dos rectos como lados tiene menos dos.*

En efecto, si desde el vértice de uno de los ángulos se llevan arcos de círculo máximo á todos los no adyacentes á este, se descompondrá el polígono en tantos triángulos como lados tiene, menos dos; por lo que su área será igual al esceso de la suma de los ángu-

(1) Con efecto, las tres rectas AA', BB', CC' son otros tantos diámetros de la esfera (562, 2.º), de suerte que los dos triángulos ABC y A'B'C' están interceptados por dos triedros tales, que las aristas del uno son las prolongaciones de las del otro; luego son efectivamente simétricos.

los de todos estos triángulos sobre tantas veces dos rectos como lados tiene menos dos; mas la suma de los ángulos de todos estos triángulos es igual á la suma de los ángulos del polígono; luego *su área es igual*, etc. ([1]).

CAPÍTULO II.

COMPARACION DE LAS ÁREAS DE CUERPOS SEMEJANTES.

TEOREMA I.

665. *Las áreas de las superficies curvas de dos conos rectos, de dos troncos de conos rectos, ó de dos cilindros rectos* SEMEJANTES ([2]), *son proporcionales á los cuadrados de sus generatrices ó de los radios de sus bases.*

([1]) Fundado en este teorema, voy á dar aquí otra demostracion del de *Euler*, modificando ligeramente la que el eminente matemático y poeta *D. Alberto Lista* inserta en su escelente *Tratado de Geometría*.

Tomando un punto cualquiera en lo interior de un poliedro, trazando una esfera cuyo centro esté en este punto, y haciendo pasar planos por el mismo y las diferentes aristas del poliedro, quedarán formados sobre la superficie de la esfera tantos polígonos esféricos formados por arcos de círculo máximo como caras tuviese el poliedro dado. La superficie de cada uno de estos polígonos será

$$s - 2(n - 2),$$

llamando s á la suma de todos sus ángulos y n al número de sus lados. La suma de las áreas de todos los polígonos convexos que hemos formado sobre la superficie esférica será, por consiguiente, igual á la suma de todos los ángulos de todos los polígonos esféricos, disminuida esta suma en el duplo de los lados que compongan entre todos los polígonos, aumentada esta diferencia en el cuádruplo del número de caras.

Sea S el número de ángulos poliedros del cuerpo dado; como todos los que se reunan en cada vértice de los polígonos han de valer juntos cuatro rectos, se infiere que la medida de la suma de los ángulos de todos los polígonos es 4S. Además llamando A al número de aristas, ya sabemos que el de lados de todas las caras del poliedro es 2A; por último si C es el número de caras, podemos espresar la suma de las áreas de todos los polígonos esféricos por $4S - 4A + 4C$, y como entre todos han de componer el área de la esfera, que es igual á la de ocho triángulos trirectángulos, tendrémos

$$4S - 4A + 4C = 8.$$

Dividiendo por 4 ambos miembros de esta igualdad, resulta finalmente

$$C + S - A = 2.$$

(Nota del Traductor).

([2]) Se dice que estos cuerpos son semejantes cuando lo son las figuras que los han engendrado.

Sean, en efecto, T y T′, G y G′, R y R′, r y r', las áreas, generatrices y radios de las bases inferiores y superiores de dos troncos de cono recto semejante; y se tendrá (648)

[1] $$\frac{T}{T'}=\frac{(R+r)G}{(R'+r')G'}.$$

Mas, una vez que estos dos troncos son semejantes,

$$\frac{R}{R'}=\frac{r}{r'}=\frac{G}{G'};$$

por consiguiente,

[2] $$\frac{R+r}{R'+r'}=\frac{G}{G'};$$

multiplicando por órden las proporciones [1] y [2], y simplificando la proporcion producto,

$$\frac{T}{T'}=\frac{G^2}{G'^2}, \quad \text{y por lo tanto,} \quad \frac{T}{T'}=\frac{G^2}{G'^2}=\frac{R^2}{R'^2}=\frac{r^2}{r'^2}.$$

Pero los troncos se convierten en conos ó cilindros, segun que r y r' son nulos ó respectivamente iguales á R y R′; luego está demostrado el teorema.

Teorema II.

666. *Las áreas de dos casquetes, de dos zonas, de dos esferas, de dos husos y de dos triángulos esféricos* SEMEJANTES [1], *son proporcionales á los cuadrados de sus radios.*

1.° Sean C y C′, R y R′, h y h' las áreas, radios y alturas de dos casquetes semejantes y tendrémos (655)

[1] $$\frac{C}{C'}=\frac{R.h}{R'.h'}.$$

Mas por ser semejantes los casquetes, los dos triángulos BOC y B′O′C′ (fig. 261) tambien lo son (278); y dan

---

[1] Dos casquetes ó dos segmentos son semejantes cuando corresponden á superficies cónicas iguales; dos zonas son semejantes cuando son diferencias de casquetes semejantes, y dos husos ó dos triángulos esféricos lo son cuando corresponden á ángulos diedros ó triedros iguales.

$$\frac{R}{R'}=\frac{OC}{O'C'};$$

de donde resulta

[2] $$\frac{R-OC}{R'-O'C'}, \text{ ó } \frac{h}{h'}=\frac{R}{R'}.$$

De modo que, multiplicando por órden las proporciones [1] y [2], y simplificando,

$$\frac{C}{C'}=\frac{R^2}{R'^2}, \quad \text{y por lo tanto} \quad \frac{C}{C'}=\frac{R^2}{R'^2}=\frac{h^2}{h'^2}.$$

2.° Esta demostracion es independiente de las alturas de los dos casquetes, y conviene tambien á dos hemisferios, y por consiguiente, á dos esferas. Además, es evidente que la relacion de las áreas de dos esferas que tienen R y R′ por radios es

$$\frac{4\pi R^2}{4\pi R'^2}=\frac{R^2}{R'^2}.$$

3.° Sean Z y Z′ las áreas de dos zonas semejantes, y C y c, C′ y c′ las de los casquetes semejantes, de que las primeras son diferencias; y se tendrá

$$\frac{C}{C'}=\frac{R^2}{R'^2}=\frac{c}{c'}$$

de donde

$$\frac{C-c}{C'-c'}, \text{ ó } \frac{Z}{Z'}=\frac{R^2}{R'^2}.$$

4.° En fin, se sigue de los teoremas de los n.os 659 y 663, que las áreas de dos husos, ó de dos triángulos esféricos semejantes, son proporcionales á las de las esferas de que son partes, y por consiguiente, á los cuadrados de sus radios.

Teorema III.

667. *Las áreas de dos poliedros semejantes cualesquiera son proporcionales á los cuadrados de sus líneas homólogas.*

Para demostrarlo, no habrá mas que comparar cada cara del uno con la semejante del otro, como se ha hecho en el n.° 400 para los triángulos semejantes en que se habian descompuesto los dos polígonos dados.

LIBRO DÉCIMO.

VOLÚMENES.

CAPÍTULO PRIMERO.

MEDIDA DE LOS VOLÚMENES.

668. *El* VOLÚMEN *de un cuerpo es la porcion del espacio comprendida por la superficie de este. Para medir el volúmen de un cuerpo, se busca la relacion de este volúmen con otro que se toma por unidad. Tomarémos desde luego por tal el del cubo, cuya arista es igual á la unidad lineal;* de suerte que *la medida del volúmen de un cuerpo será la relacion de su volúmen con el del cubo que tiene por lado la unidad de longitud.*

Teorema I.

669. *Los volúmenes de dos paralelepípedos rectángulos* AC *y* FI [1] (fig. 262) *que tengan la misma base, son proporcionales á sus alturas* AD *y* FK.

Repítase la demostracion del n.° 358, tirando por los puntos de division de las alturas planos paralelos á las bases.

Teorema II.

670. *Los volúmenes de dos paralelepípedos rectángulos de igual altura son proporcionales á sus bases.*

Designemos por P y P′ los volúmenes de los dos paralelepípedos, y por e y l, y por e' y l' los dos lados contiguos de sus respectivas bases. Construyamos un tercer paralelepípedo rectángulo P″, que tenga la misma altura h que los dos primeros, y cuya base sea del

[1] Convendrémos, por la brevedad, en designar un paralelepípedo por las letras colocadas en dos vértices opuestos.

mismo largo que la del primero, y del mismo ancho que la del segundo. Hechas estas suposiciones, comparemos los dos paralelepípedos P y P″, en los cuales, tomando por bases las caras que en cada uno tienen por lados contiguos e y h, serán l y l' las alturas, y se tendrá (669)

$$\frac{P}{P''}=\frac{l}{l'}.$$

Comparando el segundo paralelepípedo con el tercero, se hallará igualmente

$$\frac{P''}{P'}=\frac{e}{e'}.$$

Multiplicando ahora ordenadamente estas proporciones, y suprimiendo el factor P″ que resulta comun á los dos términos de la primera razon, resultará

$$\frac{P}{P'}=\frac{l.e}{l'.e'},$$

lo que demuestra el teorema.

Teorema III.

671. *Los volúmenes de dos paralelepípedos rectángulos son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas.*

La misma demostracion que en el n.° **360**.

Teorema IV.

672. *La medida del volúmen de un paralelepípedo rectángulo es el producto de su base por su altura.*

Llamemos P el volúmen del paralelepípedo que se va á medir, B el área de su base y h su altura; C el volúmen del cubo que se toma por unidad, cuya base será entonces igual á la unidad de superficie, y su altura á la unidad lineal; luego, etc. (Véase el n.° **361**).

673. La verdad de esta proposicion se hace evidente con solo mirar la figura, cuando las longitudes de las dimensiones del rectángulo son números enteros. Pero aun cuando sean fraccionarios, es tambien fácil cerciorarse de ella; porque, sea el paralelepípedo CE (fig. 263) cuyas tres aristas AB, AD y AE valen respectivamente $4^{m}\frac{2}{5}$, $3^{m}\frac{1}{3}$ y $2^{m}\frac{3}{4}$. Por los puntos de division de cada arista, tiro planos paralelos al de las otras dos, con lo que divido al volúmen en metros cúbicos y partes de metro cúbico. El paralelepípedo HM es los $\frac{2}{3}$ de un metro cúbico (668); por lo que la parte IABH vale $4^{\text{m.c}}\frac{2}{3}$; y la IABK $= 4^{\text{m.c}}\frac{2}{3}.3$. Mas una vez que KC $= \frac{1}{3}^{\text{m}}$, la parte LKCD es el tercio de IABH, y vale así $4^{\text{m.c}}\frac{2}{3}.\frac{1}{3}$; de suerte que IABCD $= 4^{\text{m.c}}\frac{2}{3} \times 3\frac{1}{3}$, y por consiguiente, OABCD $= 4^{\text{m.c}}\frac{2}{3} \times 3\frac{1}{3} \times 2$. Pero por ser EO $= \frac{3}{4}^{\text{m}}$, la zona OGEF es los $\frac{3}{4}$ de IABCD, y vale, por lo mismo, $4^{\text{m.c}}\frac{2}{3} \times 3\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}$; luego el paralelepípedo EC vale $4^{\text{m.c}}\frac{2}{3} \times 3\frac{1}{3} \times 2\frac{3}{4}$.

674. Corolario. Si se observa que el área de la base es igual al producto de sus aristas contiguas, se deducirá que *la medida del volúmen de un paralelepípedo rectángulo es el producto de sus tres dimensiones.*

Teorema V.

675. *El volúmen de un cubo tiene por medida la tercera potencia de su arista.*

En efecto, siendo el cubo un paralelepípedo rectángulo cuyas tres aristas son iguales, su volúmen tendrá por medida la tercera potencia de una de ellas ([1]).

676. Corolario. Habiéndose adoptado en España por unidad lineal el metro, la de volúmen será *el* METRO CÚBICO. *Esta unidad se subdivide en mil decímetros cúbicos, el decímetro cúbico en mil centímetros cúbicos, y el centímetro cúbico en mil milímetros cúbicos;* así es que, *para convertir un número cualquiera de metros cúbicos en* DECÍMETROS CÚBICOS, *ó en* CENTÍMETROS *ó* MILÍMETROS CÚBICOS, *basta correr la coma* TRES, SEIS *ó* NUEVE *lugares hácia la derecha.*

Antiguamente, *la unidad de volúmen era la* VARA CÚBICA, *la cual valia 27 piés cúbicos. El pié cúbico se componia de 1728 pulgadas cúbicas, y la pulgada cúbica de 1728 líneas cúbicas.* Cuando las dimensiones de un paralelepípedo rectángulo se hallan espresadas en varas y partes de vara, lo mejor para calcular su volúmen es convertir cada una de ellas en unidades del último órden. Propongámonos, por ejemplo, encontrar el lado de un cubo equivalente á un paralelepípedo rectángulo, cuyas tres aristas contiguas valgan respecti-

---

([1]) Así, cuando se forma la tercera potencia de un número, se ejecuta la operacion necesaria para valuar el volúmen del cubo cuya arista contuviese este mismo número de unidades lineales. Por esto se ha llamado cubo de un número la tercera potencia del mismo.

vamente $6^v\ 2^p\ 3^p$, $2^v\ 0^p\ 9^p$, y $2^p\ 3^p$ se reducirán estos tres números á pulgadas, y multiplicando los resultados entre sí, hallarémos que el volúmen del cubo equivale á 531441 pulgadas cúbicas; de suerte que, estrayendo la raiz cúbica del número abstracto 531441, se tendrá para la longitud de la arista $81^p = 2^v\ 0^p\ 9^p$.

Teorema VI.

677. *Dos paralelepípedos* AG *y* AM (fig. 264) *son equivalentes cuando tienen una cara comun* AC, *y las opuestas á esta* EG *y* KM *se hallan situadas en un mismo plano y comprendidas entre las mismas paralelas* EL *é* IM.

En efecto, el prisma triangular EAKIDN es igual á FBLGCM; porque el paralelógramo AI es igual á BG como caras opuestas del mismo paralelepípedo AG (603); por la misma razon, AN es igual á BM; además, el triángulo EAK es igual á FBL, por tener ambos un ángulo igual (72) comprendido entre lados iguales (196); luego los prismas EAKIDN y FBLGCM tienen un ángulo triedro comprendido entre tres caras iguales una á una, y semejantemente dispuestas; de consiguiente, son iguales (612). Mas si se resta el primero del poliedro ABCDELMI, queda el paralelepípedo AM, y restando el segundo prisma del mismo poliedro, queda el AG; por lo tanto, estos dos paralelepípedos son equivalentes.

Teorema VII.

678. *Dos paralelepípedos* AG *y* AM (fig. 265) *de la misma base y altura son equivalentes.*

En efecto, teniendo estos paralelepípedos la misma base inferior y la misma altura, sus bases superiores EG y KM deben encontrarse en un mismo plano, y entonces, prolongando los de las caras AF y DG del primero, y los de las caras AN y BM del segundo, se formará un tercer paralelepípedo AR (602), que será equivalente á cada uno de los otros dos AG y AM; porque tienen los tres la cara comun AC; y las opuestas á esta PR y EG, PR y KM, se hallan situadas en el mismo plano y comprendidas entre las mismas paralelas EQ é IR, PN y QM; por lo cual, los dos paralelepípedos AG y AM son equivalentes.

Teorema VIII.

679. *Todo paralelepípedo puede transformarse en otro rectángulo de base equivalente y de la misma altura.*

Sea ABFE (fig. 264) la base del propuesto. Tiremos por cada uno de los lados de este paralelógramo planos perpendiculares al suyo. El espacio AG, comprendido entre ellos y los planos de las bases del paralelepípedo dado, será uno recto (605) y equivalente á aquel, y en el cual (678), si la base AF fuera un rectángulo, quedaria demostrado el teorema. Si no lo fuese, tírense en los puntos A y B las perpendiculares AK y BL, terminándolas en la prolongacion de EF, llévense planos por las rectas AD y AK, BC y BL, y se formará un paralelepípedo rectángulo AM (605) equivalente al propuesto (677), que tendrá la misma altura AD que él, y una base AL equivalente á la suya AF (366).

680. Corolario. *El volúmen de un paralelepípedo cualquiera tiene por medida el producto de su base por su altura* (672).

Teorema IX.

681. *Todo prisma triangular es la mitad de un paralelepípedo de doble base y de la misma altura.*

Sea ABCDFG (fig. 266) el prisma propuesto. Tiro por las aristas BF y GC planos paralelos á sus respectivas caras AG y AF, y formo así un paralelepípedo AK, al que el plano CF divide en dos prismas triangulares ABCDFG y BCIGFK [1]; luego demostrando que son equivalentes, habré probado que el primero es la mitad del paralelepípedo AK. Para conseguirlo, tomo sobre la prolongacion de la arista AD una longitud A′D′=AD, despues tiro por los puntos D′ y A′ dos planos perpendiculares á esta arista, y el espacio comprendido entre ellos y los de las caras laterales del paralelepípedo AK será otro paralelepípedo recto A′K′, dividido por el plano CF en dos prismas rectos iguales (613). Pero cada uno de ellos es equivalente al prisma oblícuo correspondiente; porque, si colocamos el tronco de prisma A′B′C′ABC sobre D′F′G′DFG, se podrá hacer que coinci-

(1) *Estos prismas son* SIMÉTRICOS *con relacion al centro del paralelepípedo* ([illegible] y [illegible]).

dan sus bases inferiores A'B'C' y D'F'G', y entonces sus aristas laterales coincidirán tambien (437); mas una vez que A'D'=AD, será por fuerza DA'=AD' y el punto A caerá sobre D; lo mismo se verificará con los vértices C y B respecto á sus homólogos G y F; de modo que los dos poliedros A'B'C'ABC y D'F'G'DFG se cubrirán perfectamente; luego son iguales: mas, si de cada uno se resta el tronco de prisma D'F'G'ABC, quedará del primero el prisma recto A'B'C'D'F'G', y del segundo el prisma oblícuo ABCDFG; luego son equivalentes. Lo mismo se verifica evidentemente con B'C'I'G'F'K' y BCIGFK; luego los dos ABCDFG y BCIGFK son equivalentes, y cada uno es la mitad del paralelepípedo AK de doble base y de la misma altura.

682. Corolario I. *El volúmen de todo prisma triangular tiene por medida el producto de su base por su altura.*

En efecto, siendo un prisma triangular cualquiera la mitad de un paralelepípedo de doble base y de la misma altura, su volúmen tendrá por medida la mitad de la base de este paralelepípedo multiplicada por su altura; es decir, el producto de su base por su altura.

683. Corolario II. *El volúmen de un prisma poligonal cualquiera tiene por medida el producto de su base por su altura;* porque, si se divide la base ABCDE (fig. 244) en triángulos por medio de diagonales, y por estas líneas y las aristas en que concurren se tiran planos, se descompondrá el prisma AI en otros triangulares que tendrán la misma altura que este prisma, y en que la medida de cada uno será el producto del área del triángulo que le sirve de base multiplicada por esta altura. En la suma de los volúmenes parciales, se podrá sacar la altura por factor comun, y se encontrará entonces, para la espresion del volúmen pedido, la suma de las áreas de los triángulos que componen la base del prisma AI; es decir, el área de esta base, multiplicada por su altura.

684. Hemos visto (650) que un cilindro cualquiera puede considerarse como un prisma infinitesimal, y en este concepto deducirémos del corolario anterior el siguiente

Teorema X.

El volúmen de un cilindro cualquiera tiene por medida el producto de su base por su altura: de modo que, en el caso particular de un cilindro circular recto, designando por C, h y R el volúmen, la altura y el radio de su base, se tendrá

$$C=\pi R^2 h \text{ (}^1\text{)}.$$

Ejemplo. *¿ Cuál es la medida de la fuerza ejercida sobre el piston de una máquina de vapor, suponiendo que el diámetro del piston tiene 5 decímetros, y que se trabaja bajo una presion de 3 atmósferas?* El área del piston es $\frac{1}{4}25^{dmc}.3{,}142=19^{dmc},64$. Mas la presion atmosférica es igual al peso de una columna de agua de $10^m,4$ de altura; con que la fuerza ejercida sobre el piston será el peso de una columna de agua cuyo volúmen sea $(19{,}64.10{,}4.3)^{dmc}$; es decir, igual á $612^{kg},69$.

685. Corolario. *El volúmen de un tronco de cilindro circular recto tiene por medida el producto de su base por su eje* (652).

Teorema XI.

686. *Dos tetráedros* SABC *y* s a b c (fig. 267) *que tienen bases equivalentes y alturas iguales* SO *y* s o, *son equivalentes* [2].

Divídase la altura SO del primer tetráedro en un número cualquiera de partes iguales, y despues de haber colocado las bases de los dos tetráedros sobre un mismo plano, tírense por todos los puntos de division I, K, L planos paralelos á este. Los tetráedros quedarán así descompuestos en rebanadas de la misma altura, y cuyas bases serán equivalentes una por una (601). Háganse pasar por cada uno de los lados B′C′, B″C″, B‴C‴ planos B′E, B″E′, B‴E″ paralelos á la arista SA, y por los $b'c'$, $b''c''$, $b'''c'''$ los planos $b'e$, $b''e'$, $b'''e''$ paralelos á la sa; y formarémos así dos séries de prismas, tales que cada uno de los inscriptos en el tetráedro SABC será equivalente al correspondiente inscripto en el $s\ a\ b\ c$ (682), porque tienen bases equivalentes y la misma altura; luego la suma de los prismas inscriptos en el primer tetráedro será igual á la suma de los inscriptos en el segundo.

Supongamos ahora que se divide la altura SO en un número de partes duplo, cuádruplo, etc.; el número de los prismas inscriptos en cada tetráedro será duplo, cuádruplo, etc.; mas la suma de los

---

(1) Para dar otra demostracion rigorosa de este teorema, véase el *Apéndice*.

(2) Véase el *Apéndice* II.

prismas inscriptos en el primer tetráedro no dejará de ser igual á la suma de los inscriptos en el segundo; y estas dos sumas quedarán siempre iguales, cualquiera que sea el número de partes en que se haya dividido la altura SO. Todavía se verificará lo mismo cuando el número de estas partes se haya hecho infinito; pero entonces estas dos sumas habrán llegado á sus respectivos límites, que son evidentemente los tetráedros SABC y *s a b c*; luego los dos tetráedros son equivalentes.

Teorema XII.

687. *Un tronco de prisma triangular es la suma de tres tetráedros de la misma base* DEF (fig. 268) *que él, y cuyos vértices son los* A, B, C *de su base superior.*

Tírese por el punto A y la arista FE un plano cuyas trazas sobre las caras CD y BD serán las rectas AF y AE. Réstese del tronco el tetráedro AFDE, cuya base es la misma del tronco, y que tiene por vértice A, uno de los de la base superior, y quedará entonces una pirámide cuadrangular ABCFE que se descompondrá en dos tetráedros ACFE y ACBE, haciendo pasar por las aristas AC y AE un plano que cortará su base segun CE. Pero al primero puede sustituir el tetráedro CDFE; porque ambos tienen la misma base CFE y la misma altura, por cuanto sus vértices A y D se hallan situados sobre una paralela AD al plano de la base (448), y se puede mirar el CDFE como teniendo por base la misma DFE del tronco, y por vértice el C de su base superior, y este satisface á las condiciones del enunciado.

Ahora necesitamos probar que el tercer tetráedro ACBE es equivalente al BDFE, que tiene por base el triángulo DFE, y por vértice el tercer vértice B de la base superior del tronco. Pero esto es claro; porque, si se considera que el tetráedro BDFE tenga por base el triángulo BFE, y por vértice el punto D, se reconocerá que su base es equivalente á la del tetráedro ACBE (369), y que tiene la misma altura que él, pues que sus vértices D y A se hallan sobre una paralela al plano de sus bases.

688. Corolario I. Como esta demostracion es enteramente independiente de la inclinacion mútua de los planos ABC y DEF, es aplicable al caso en que estos planos sean paralelos, es decir, al en que el poliedro ABCDEF sea un prisma triangular. Mas entonces los tres tetráedros que le componen son equivalentes (686), luego cada uno

de ellos es el tercio de este prisma; de modo que *un tetráedro es el tercio de un prisma triangular de la misma base y de la misma altura*; y por consiguiente, *su volúmen tiene por medida el tercio del producto de su base por su altura.*

689. Corolario II. *El volúmen de una pirámide cualquiera tiene por medida el tercio del producto de su base por su altura.* (Repítase aquí la demostracion del n.° 683.

690. Corolario III. *Dos pirámides simétricas son equivalentes;* porque tomando el plano de la base de una de ellas por el de simetría, se verá claramente que tienen alturas iguales (636).

691. Corolario IV. *El volúmen de un tronco de prisma triangular tiene por medida el producto de su base inferior por el tercio de la suma de las tres perpendiculares bajadas sobre esta base desde los vértices de la otra.* Para demostrarlo no hay mas que sumar los volúmenes de los tres tetráedros que le componen, y sacar la base por factor comun.

Se puede decir tambien que *un tronco de prisma triangular tiene por medida el área de su seccion recta, multiplicada por el tercio de la suma de sus aristas laterales.*

En efecto, la seccion recta divide el tronco en dos partes que por ser troncos de prismas rectos, tiene cada una por medida el área de esta seccion multiplicada por el tercio de la suma de sus aristas; luego, etc.

692. Hemos visto (646) que se puede considerar un cono circular recto como una pirámide regular infinitesimal. Es claro que, considerando una pirámide cualquiera, despues inscribiendo ó circunscribiendo un polígono á su base, y razonando de la misma manera, se demostrará que *un cono cualquiera puede ser mirado como una pirámide infinitesimal;* deducirémos entonces del corolario II (689) el siguiente

Teorema XIII.

El volúmen de un cono cualquiera tiene por medida el tercio del producto de su base por su altura. Así es que en el caso particular de *un cono circular recto*, designando por C, h y R el volúmen, la altura y el radio de la base de este cono, se tendrá

$$C = \tfrac{1}{3}\pi R^2 h \ (^1).$$

(1) Véase el *Apéndice* II.

TEOREMA XIV.

693. *Un tronco de pirámide de bases paralelas es la suma de tres pirámides de la misma altura que él, y cuyas bases respectivas son las dos del tronco y una media proporcional entre estas.*

Sea TGHIKL (fig. 269) una pirámide cualquiera. Transformemos su base en un triángulo DEF, y sobre este construyamos un tetráedro de la misma altura que la pirámide. Entonces, si habiendo colocado las dos bases sobre un mismo plano, se corta á los poliedros por uno paralelo á este, se determinarán dos secciones MNOPQ y ABC, que serán equivalentes, porque son proporcionales á las bases. Las dos pirámides deficientes son equivalentes, por serlo sus bases y tener la misma altura; mas las pirámides totales lo son tambien por la misma razon : luego los dos troncos lo serán asimismo; y como tienen la misma altura y bases equivalentes, claro es que, demostrando el teorema para el tronco de pirámide triangular, quedará tambien demostrado para el de pirámide poligonal.

Tiremos un plano por el punto A y por la arista FE, y restemos del tronco ABCDEF el tetráedro ADFE que tiene por base la inferior del tronco y la misma altura que él, porque su vértice A es uno de los de la base superior. Quedará la pirámide cuadrangular ABCFE, que se dividirá en dos tetráedros ACFE y ABCE, haciendo pasar un plano por sus aristas AC y AE. El segundo tiene por base la superior del tronco, y la misma altura que él, por ser su vértice E uno de los de la base inferior; así tenemos ya dos de las tres pirámides de que se trata.

Pero, si se toma FG=CA, y por el punto G y la recta CE se tira un plano, cuyas trazas sobre las caras SFD y FDE serán CG y GE, se formará un tetráedro CFGE, que podrá sustituir al ACFE; porque ambos tienen la misma base CFE, y sus vértices G y A se hallan situados sobre una paralela al plano de esta. Mas tomando el punto C por vértice del CFGE, su altura será la misma que la del tronco; y entonces, probando que la base FGE es media proporcional entre las del tronco, el teorema quedará demostrado. Para hacerlo ver, tomo FI=CB, y uno G con I, lo que dará el triángulo FGI, igual á ABC (181). Pero los dos triángulos FGI y FGE tienen sus bases FI y FE en línea recta, y sus vértices en el mismo punto G; luego tienen la misma altura; y serán entre sí como sus bases (370); por consiguiente,

$$\frac{\text{FGI ó ABC}}{\text{FGE}}=\frac{\text{FI ó BC}}{\text{FE}}.$$

La comparacion de los triángulos FGE y FDE dará igualmente

$$\frac{\text{FGE}}{\text{FDE}}=\frac{\text{FG ó AC}}{\text{FD}}.$$

Mas siendo los triángulos ABC y FDE semejantes (279), tendrán sus lados homólogos proporcionales, y la relacion de BC á FE será igual á la de AC á FD; por lo cual, siendo iguales las segundas razones de la dos proporciones, lo serán igualmente las primeras, y se tendrá

$$\frac{\text{ABC}}{\text{FGE}}=\frac{\text{FGE}}{\text{FDE}},$$

lo que prueba que el triángulo FGE es medio proporcional entre las dos bases del tronco, y acaba de demostrar el teorema [1].

---

[1] Tambien se puede dar esta otra demostracion, que es muy sencilla:

Designemos por A^2 y a^2 las áreas de dos cuadrados equivalentes á las bases del tronco, por H y h las alturas de las pirámides de que este tronco es diferencia, por V y v los volúmenes de estas pirámides, y por $H-h=k$ la altura del tronco, y se tendrá

$$V=\tfrac{1}{3}HA^2 \quad \text{y} \quad v=\tfrac{1}{3}a^2h; \quad \text{de donde} \quad V-v=\tfrac{1}{3}(A^2H-a^2h).$$

Mas en virtud del teorema del n.° [illegible], se tiene

$$\frac{A^2}{a^2}=\frac{H^2}{h^2} \quad \text{y por lo tanto} \quad \frac{A}{a}=\frac{H}{h},$$

proporcion de que se saca

$$\frac{A-a}{H-h}=\frac{A}{H}, \quad \text{de donde} \quad H=\frac{Ak}{A-a},$$

$$\frac{A-a}{H-h}=\frac{a}{h}, \quad \text{de donde} \quad h=\frac{ak}{A-a}.$$

Sustituyendo estos valores de H y h en la espresion del volúmen del tronco, y poniendo $\frac{k}{3}$ por factor comun, tendrémos

$$V-v=\frac{k}{3}\cdot\frac{A^3-a^3}{A-a}.$$

Si se efectúa la division de (A^3-a^3) por $(A-a)$, se encontrará

$$V-v=\frac{k}{3}(A^2+Aa+a^2),$$

ó lo que es lo mismo,

$$V-v=\tfrac{1}{3}A^2k+\tfrac{1}{3}a^2k+\tfrac{1}{3}Aak.$$

Cuya fórmula es la espresion del teorema, porque Aa es una media proporcional entre A^2 y a^2.

694. COROLARIO. *El volúmen de un tronco de pirámide de bases paralelas tiene por medida el tercio del producto de la altura por la suma efectuada de sus dos bases y de su media proporcional.*

TEOREMA XV.

695. *Un tronco de cono de bases paralelas es la suma de tres conos de la misma altura que él, y cuyas bases respectivas sean las mismas del tronco y una media proporcional entre estas dos.*

Para demostrarlo, no habrá mas que construir un tetráedro de la misma altura que el cono de donde proviene el tronco, y cuya base sea equivalente á la de este cono. Será fácil reconocer, razonando como en el primer párrafo de la demostracion del teorema XIV, que el tronco de cono es equivalente á uno de pirámide triangular de la misma altura, y cuyas bases sean equivalentes á las suyas; de suerte que, siendo el teorema cierto para un tronco de pirámide triangular, lo será tambien para uno de cono (¹).

Si el tronco de cono es circular, y se designa por h su altura y por R y r los radios de sus bases, se encontrará fácilmente para medida de su volúmen la espresion :

$$\tfrac{1}{3}\pi h(\mathrm{R}^2+r^2+\mathrm{R}r).$$

Por esta razon, *el volúmen de un tronco de cono circular de bases paralelas tiene por medida el tercio del producto de la relacion de la circunferencia al diámetro, multiplicada por su altura y por la suma efectuada de los cuadrados de los radios de sus bases y del producto de estos mismos radios.*

PRIMER EJEMPLO. *Medir el volúmen de una porcion de muro cortado en talud circular, conociendo el radio de la curvatura interior, el espesor del talud, la altura del muro y el número de grados del arco.*

Este volúmen es evidentemente la diferencia de los de dos sectores semejantes del cono truncado y del cilindro : así, no habrá mas que valuar los volúmenes de estos dos cuerpos, tomar la diferencia, lo que dará la medida del volúmen V del anillo comprendido entre sus caras, y se tendrá en seguida el volúmen pedido v por la proporcion

$$\frac{v}{\mathrm{V}}=\frac{n^0}{360^0}.$$

(¹) Será todavía mas sencillo aplicar aquí la demostracion dada en la nota (¹) del número 692.

Segundo ejemplo. *Medir la capacidad de un tonel.*

Suponiendo que se haya dividido el eje del tonel en cuatro partes iguales, y tirado por los puntos de division planos perpendiculares á este eje, se habrá dividido el tonel en otras cuatro partes, que se podrán mirar casi como troncos de cono; de suerte que, valuándolos conforme á la regla precedente, se tendrá resuelta la cuestion.

Se ha encontrado que el radio de una de las secciones intermedias valia, con muy pequeño error, $\frac{2R+r}{3}$, representando R y r los radios del *buge* y del *fondo*. Por esto, llamando l la longitud del tonel, se encontrará fácilmente para espresion de su capacidad

$$\frac{\pi l}{54}(23R^2+17Rr+14r^2),$$

fórmula que dará muy exactamente dicha capacidad, aumentando en sus dos céntimos el resultado que se obtenga.

Obsérvese que la aplicacion de esta fórmula no exigirá mas que la medida de r; porque la longitud interior de un tonel, el diámetro del buge y el del fondo están en la relacion de los números **21**, **18** y **16**. Así pues, si se encontrase que $2r=0^m,435$, se deduciria que

$$2R=\frac{18}{16}.2r=0^m,490$$

y que

$$l=\frac{21}{16}.2r=0^m,572.$$

Estas son las dimensiones del hectólitro; y en efecto, sustituyendo los valores anteriores en la fórmula, y haciendo la correccion indicada, se encuentra 100 decímetros cúbicos; es decir, 100 litros.

Teorema XVI.

696. *El volúmen de un tronco de paralelepípedo tiene por medida el producto de su base inferior por la cuarta parte de la suma de las perpendiculares bajadas sobre esta base desde los vértices de la otra.*

Designemos por a, b, c, d las perpendiculares bajadas desde los vértices respectivos A, B, C, D (fig. 270) de la base superior sobre la inferior, y representemos el área de esta por B. Supuesto esto, si tiramos un plano por las dos aristas opuestas AE y CG, descompondrémos el tronco de paralelepípedo en dos prismas triangulares truncados, cuyas medidas serán respectivamente (691)

$$\frac{B}{2}.\frac{a+b+c}{3}, \quad y \quad \frac{B}{2}.\frac{a+c+d}{3}.$$

Tirando tambien un plano por las dos aristas BF y DH, descompondrémos el tronco en dos nuevos prismas truncados, cuyos volúmenes tendrán por medida

$$\frac{B}{2}.\frac{a+b+d}{3}, \quad y \quad \frac{B}{2}.\frac{b+c+d}{3}.$$

Sumando estos cuatro productos, tendrémos evidentemente el doble del volúmen V del tronco del paralelepípedo; de modo que poniendo $\frac{B}{2}$ por factor comun, se reducirá á

$$2V=\frac{B}{2}(a+b+c+d);$$

porque cada una de las perpendiculares a, b, c, d está repetida tres veces: dividiendo por 2, se tendrá finalmente

$$V=\frac{B}{4}(a+b+c+d), \quad ó \quad V=B.\frac{a+b+c+d}{4},$$

que es lo que se queria demostrar.

Se puede decir tambien que un tronco de paralelepípedo tiene por medida el área de su seccion recta, multiplicada por la cuarta parte de la suma de sus aristas laterales (691).

Problema I.

697. *Calcular el volúmen de un poliedro cualquiera.*

No habrá mas que descomponerle en pirámides, y valuar el volúmen de cada una. Pero la naturaleza del poliedro propuesto da muchas veces medios mas sencillos de obtener este volúmen. Supongamos, por ejemplo, que se pide el comprendido entre dos muros en talud, terminado cada uno por un plano perpendicular á su direccion, y sean ABCFED (fig. 271) y A'B'C'F'E'D' los planos inferior y superior de estos muros. El plano EBE'B' divide al volúmen pedido en dos troncos de prismas rectos FC'B'E y DA'B'E, fáciles de medir, descomponiéndolos en troncos de prismas triangulares. Designando por a, b, a', b', c, c' y h las aristas BC, EF, B'C', E'F', CF, C'F' y FF', se hallará para el primer tronco FC'B'E:

$$V = \frac{h}{6}\{c'(a+a'+b')+c(a+b+b')\}.$$

Si en lugar de considerar el volúmen propuesto, se considerase un exáedro simétrico respecto á dos planos rectangulares, no habria mas que hacer en esta fórmula $a'=b'$, $a=b$, y tomar á c y c' como las anchuras de las caras CE y C'E', y h como la distancia entre sus planos, y se encontraria

$$V = \frac{h}{6}\{c'(2a'+a)+c(2a+a')\}.$$

Si $\qquad c'=0$, se reduce á $V=\frac{ch}{6}(2a+a')$.

Estas fórmulas sirven para calcular las capacidades de los fosos.

Teorema XVII.

698. *El volúmen engendrado por un triángulo al girar alrededor de un eje tirado en su plano por su vértice, tiene por medida el producto del área engendrada por la base del triángulo multiplicada por el tercio de su altura.*

Pueden verificarse tres casos: que el eje de revolucion coincida con uno de los lados del triángulo; que encuentre á la base; ó que la sea paralelo.

1.° Supongamos que el triángulo ABC (fig. 272) gira alrededor de su lado AC; es claro que el volúmen V que engendre será la suma de los conos producidos por la rotacion de los triángulos ABB' y BCB'; mas como tienen la misma base, la suma de sus volúmenes es igual al tercio del producto de esta por la suma de sus alturas AB' y B'C:

luego $\qquad V=\frac{1}{3}\pi\overline{BB'}^2 . AC.$

Pero el área A de la superficie engendrada por BC tiene por espresion (647)

$$A = \pi BB'.BC;$$

por otra parte, la semejanza de los triángulos AMC y BCB′ (278) da la proporcion

$$\frac{AM}{BB'}=\frac{AC}{BC};$$

de la cual se obtiene $BB'.AC=BC.AM$;

y multiplicando los dos miembros de esta última igualdad por $\frac{1}{3}\pi.BB'$

$$\tfrac{1}{3}\pi\overline{BB'}^2.AC=\tfrac{1}{3}BB'.BC.AM.$$

Mas el primer miembro de esta ecuacion es la medida del volúmen V que se busca; el producto $\pi.BB'.BC$ espresa la del área A que engendra la base BC; luego, sustituyendo, tendrémos por último,

$$V=\tfrac{1}{3}A.AM,\quad \text{ó sea}\quad V=A.\tfrac{1}{3}AM,$$

como se ha enunciado.

2.° Supongamos ahora que se trate del triángulo ABD que gira alrededor de AC. Entonces el volúmen pedido será la diferencia de los engendrados por los triángulos ABC y ADC; y como cada uno tiene por medida el producto del área de la superficie descripta por su base multiplicada por el tercio de la altura comun AM, la medida buscada será tambien igual al producto de multiplicar la diferencia de las áreas de estas dos superficies, esto es, el área engendrada por BD, multiplicada por el tercio de AM.

3.° Los conos engendrados por los triángulos BAB′ y DAD′ (figura 273) son respectivamente los tercios de los cilindros AMBB′ y AMDD′; luego su suma será el tercio del cilindro BDD′B′, y por consiguiente, el volúmen engendrado por el triángulo ABD los dos tercios del de este cilindro; así

$$V=\tfrac{2}{3}\pi\overline{MA}^2.BD=2\pi AM.BD\times\tfrac{1}{3}AM.$$

Mas $2\pi AM.BD$ es la medida del área A de la superficie cilíndrica engendrada por BD (651); luego tambien en este caso

$$V=A.\tfrac{1}{3}AM.$$

*699. Corolario I. Uniendo el vértice del triángulo ABD (fig. 272) con el medio I de su base, el área A engendrada por esta tendrá por espresion $A=2\pi.II'.BD$, de suerte que se tendrá así

$$V=\tfrac{2}{3}\pi.II'.BD.AM.$$

Mas el centro de gravedad G del triángulo ABD se encuentra sobre AI y á los dos tercios de esta recta á partir de A (véase el *Apéndice* I, *Teoría de transversales)*: luego $GG' = \frac{2}{3}II'$; por otra parte, el producto BD.AM es el doble del área del triángulo ABD; luego el valor de V se convertirá en

$$V = ABD \cdot 2\pi GG',$$

esto es, que *el volúmen engendrado por un triángulo que gira alrededor de un eje tirado en su plano por su vértice, tiene por medida su área multiplicada por la circunferencia descripta por su centro de gravedad.*

700. Corolario II. *El volúmen engendrado por la revolucion de un sector poligonal regular alrededor de uno de los radios que le terminan, tiene por medida el área de la superficie engendrada por su base multiplicada por el tercio de su apotema* (654).

Teorema XVIII.

701. *El volúmen de un sector esférico tiene por medida el producto de la área del casquete que le sirve de base multiplicada por el tercio del radio*, de modo que designando por V y por R el volúmen y el radio de este sector, y por C el área del casquete que le sirve de base, se tendrá

$$V = \tfrac{1}{3}C \cdot R \text{ (1)}.$$

Este teorema resulta del corolario precedente (700), suponiendo que el número de los lados de la base del sector poligonal aumenta indefinidamente; mas se puede demostrar directamente como sigue.

Consideremos al casquete que sirve de base al sector como una superficie poliedral cuyas caras sean infinitamente pequeñas (517), y tirando planos por el centro de la esfera y por cada una de las aristas de esta superficie, se descompondrá el sector esférico en una infinidad de pirámides que tendrán por altura comun el radio de la esfera; el volúmen de cada una de estas pirámides tendrá por medida el producto de su base por el tercio del radio; y por lo tanto, la del volúmen del sector esférico será el producto de la suma de todas las bases de estas pirámides, esto es, el casquete, por el tercio del radio.

---

(1) Véase el *Apéndice* II.

TEOREMA XIX.

702. *El volúmen de la esfera tiene por medida el área de la superficie esférica multiplicada por el tercio del radio*, es decir, que designando este radio por R, se tendrá para espresion de dicho volúmen:

$$esfera\,.\,R = 4\pi R^2\,.\,\tfrac{1}{3}R\,(^1) = \tfrac{4}{3}\pi R^3;$$

así, puede decirse que *el volúmen de la esfera tiene por medida los cuatro tercios de la relacion de la circunferencia al diámetro multiplicados por el cubo del radio, ó el sesto de esta relacion multiplicado por el cubo del diámetro* D; porque $R = \frac{D}{2}$, y por lo tanto, $\tfrac{4}{3}\pi R^3 = \tfrac{1}{6}\pi D^3$.

Se puede, en efecto, considerar el volúmen de la esfera, como engendrado por un semi-círculo que gira alrededor de un diámetro, y tomar este semi-círculo como siendo él mismo la mitad de un polígono regular cuyo número de lados se ha hecho infinito; el volúmen engendrado será entonces igual al área de la superficie engendrada (esto es, á la de la superficie esférica) multiplicada por el tercio de la apotema, es decir, por el tercio del radio.

Puede tambien darse la demostracion siguiente: consideremos la superficie de la esfera como una poliedral cuyas caras fuesen infinitamente pequeñas (517), y tiremos planos por el centro de la esfera y por cada una de las aristas de esta superficie; se descompondrá la esfera en una infinidad de pirámides, etc. (Conclúyase como en el número 701).

TEOREMA XX.

703. *El volúmen de una cuña esférica es igual á la cuarta parte del de la esfera multiplicada por su ángulo* (659).

---

(1) O lo que es lo mismo, el área de un círculo máximo multiplicada por los $\frac{4}{3}$ del radio ó por los $\frac{2}{3}$ del diámetro; mas el volúmen del cilindro circunscripto á la esfera es igual al área de un círculo máximo multiplicada por el diámetro; luego *el volúmen de la esfera es los $\frac{2}{3}$ del de un cilindro circunscripto.* Este teorema y los enunciados en las notas (1) y (2) del número 658 son debidos á *Arquimedes.*

TEOREMA XXI.

704. *El volúmen engendrado por la revolucion de un segmento de círculo* AMBA (fig. 274) *alrededor de un diámetro esterior á él, es la sesta parte del de un cilindro que tuviese por radio la cuerda* AB *de este segmento, y por altura la proyeccion* A'B' *de esta cuerda sobre el eje de revolucion* OC.

Unamos O con A y con B, y es claro que el cuerpo engendrado por el segmento AMBA será la diferencia de los engendrados por el sector OAMB y por el triángulo OAB. Mas siendo el primero de estos cuerpos la diferencia de los dos sectores esféricos OCB y OCA, tendrá un volùmen igual al tercio del radio multiplicado por la diferencia de los casquetes que les sirven de bases, esto es, por el área de la zona AMB: así

$$\text{vol. OAMB} = \text{zona AMB}.\frac{\text{AO}}{3} = \tfrac{2}{3}\pi\overline{\text{AO}}^2.\text{A'B'} \ (656).$$

Por otra parte, el volúmen engendrado por el triángulo OAB tiene por espresion (698)

$$\text{vol. OAB} = \text{superf. AB}.\frac{\text{OI}}{3} = \tfrac{2}{3}\pi\overline{\text{OI}}^2.\text{A'B'} \ (653):$$

luego $$\text{vol. AMBA} = \tfrac{2}{3}\pi\text{A'B'}\,(\overline{\text{AO}}^2 - \overline{\text{OI}}^2).$$

Mas el triángulo rectángulo AOI dará

$$\overline{\text{AO}}^2 - \overline{\text{OI}}^2 = \overline{\text{AI}}^2 = \frac{\overline{\text{AB}}^2}{4},$$

porque $\text{AI} = \frac{\text{AB}}{2}$; y se tendrá con solo sustituir,

$$\text{vol. AMBA} = \tfrac{1}{6}\pi\overline{\text{AB}}^2.\text{A'B'},$$

lo que demuestra el teorema (684).

TEOREMA XXII.

705. *El volúmen de una rebanada esférica es igual al de un cilindro de la misma altura que ella, y que tuviese por base la semi-suma*

de las de esta, aumentado en el volúmen de una esfera cuyo diámetro fuese la altura de la rebanada.

Consideremos la que haya engendrado la revolucion de la superficie A'AMBB' (fig. 274) cuando gira alrededor del diámetro CD. Su volúmen V está compuesto de los engendrados por el segmento AMBA y por el trapecio AB', de modo que su espresion será (704 y 695) :

$$V = \tfrac{1}{6}\pi\overline{AB}^2 . A'B' + \tfrac{1}{3}\pi A'B'\,(\overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 + AB'.BB');$$

ó sacando por factor comun $\frac{1}{6}\pi A'B'$,

$$V = \tfrac{1}{6}\pi A'B'\,(\overline{AB}^2 + 2\overline{AA'}^2 + 2\overline{BB'}^2 + 2AA'.BB').$$

Pero como queremos espresar el volúmen de la rebanada en funcion solamente de sus bases y altura, es fuerza eliminar $\overline{AB}^2$ de la espresion que antecede. Para conseguirlo, bajo sobre BB' una perpendicular AF, y tendrémos en el triángulo rectángulo ABF que $\overline{AB}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{BF}^2$. Pero siendo BF la diferencia de las rectas BB' y AA', será su cuadrado $\overline{BB'}^2 + \overline{AA'}^2 - 2AA'.BB'$ (396); luego $\overline{AB}^2 = \overline{A'B'}^2 + \overline{BB'}^2 + \overline{AA'}^2 - 2AA'.BB'$, porque $AF = A'B'$; por consiguiente, haciendo la sustitucion en la espresion del valor de V, se tendrá, despues de haber reducido términos semejantes,

$$V = \tfrac{1}{6}\pi A'B'\,(\overline{A'B'}^2 + 3\overline{AA'}^2 + 3\overline{BB'}^2),$$

ó efectuando la multiplicacion de $\overline{A'B'}^2$ por $\frac{1}{6}\pi A'B'$, y la de $3\overline{AA'}^2 + 3\overline{BB'}^2$ por $\frac{1}{6}\pi$,

$$V = \tfrac{1}{6}\pi\overline{A'B'}^3 + A'B'\left(\frac{\pi\overline{AA'}^2 + \pi\overline{BB'}^2}{2}\right),$$

fórmula que demuestra el teorema; porque $\frac{1}{6}\pi\overline{A'B'}^3$ es el volúmen de la esfera que tenga por diámetro A'B', y $\dfrac{\pi\overline{AA'}^2 + \pi\overline{BB'}^2}{2}$ puede considerarse como un círculo cuya área sea la semi-suma de las bases de la rebanada.

706. Corolario. Observando que un segmento esférico puede muy bien considerarse como una rebanada en que una de las bases superiores sea nula, se puede decir que *un segmento esférico es igual á la mitad de un cilindro de su misma base y altura, aumentada con la esfera á quien sirve de diámetro la altura del mismo segmento.*

707. Representando por R y h el radio y la altura del segmento esférico engendrado por ACA′, será la espresion de su volúmen

$$V=\frac{1}{2}\pi h.\overline{AA'}^2+\frac{1}{6}\pi h^3.$$

Mas siendo (263, 1.°) $\overline{AA'}^2=h\,(2R-h)$; sustituyendo, sacando por factor comun $\frac{1}{6}\pi h^2$, y reduciendo, se hallará

$$V=\frac{1}{3}\pi h^2(3R-h),$$

de modo que *el volúmen de un segmento esférico tiene por medida el tercio del producto de la razon de la circunferencia al diámetro por el cuadrado de su altura y por el esceso del triplo del radio sobre esta misma altura* (1).

Problema II.

708. *Valuar el volúmen de un tronco de pirámide cuyas bases no sean paralelas.*

Esta cuestion está reducida á determinar las alturas de la pirámide total y de la deficiente. Para la primera, formaré en los puntos G y H (fig. 269) dos ángulos iguales á QGH y MHG; luego bajaré desde el vértice del triángulo que resulta una recta indefinida T′RO perpendicular á la GH. Si ahora se dobla este triángulo sobre TGH, el punto T′ irá á colocarse sobre T, de manera que las dos rectas TR y RO determinarán un plano perpendicular á la base de la pirámide, por lo que el pié de la altura se encontrará en la T′RO; por consiguiente, haciendo tambien en los puntos H é I ángulos iguales á MHI y NIH, y bajando desde el punto T″ una perpendicular T″S sobre HI, deberá tambien hallarse el pié de la altura de la pirámide en la prolongacion de esta recta, y será por lo mismo el punto O. Así, pues, en el triángulo rectángulo TRO se conoce la hipotenusa TR=T′R y el cateto RO, y es fácil conocer TO. Por medio de una construccion semejante se halla la altura de la pirámide deficiente.

---

(1) Se podia llegar directamente al mismo resultado observando que el segmento esférico que engendra ACA′ es la diferencia entre los volúmenes del sector esférico y del cono engendrados por OAC y OAA′.

PROBLEMA III.

* 709. *Hallar el volúmen engendrado por un exágono regular* ABCDEF (fig. 275) *que gira alrededor de su primera diagonal* AC.

El volúmen V que se pide está compuesto del doble del que engendra el trapecio CDEI y del doble del engendrado por el triángulo CBI. Pero

$$\text{vol. CDEI} = \tfrac{1}{3}\pi . \text{CI} . (\overline{\text{EI}}^2 + \text{EI} . \text{DC} + \overline{\text{DC}}^2) \ (695),$$

$$\text{vol. BCI} = \tfrac{1}{3}\pi . \overline{\text{BI}}^2 . \text{CI} \ (692);$$

y llamando *a* al lado del exágono, tendrémos

$$\text{EI} = \frac{3a}{2}; \quad \text{CI} = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad \text{BI} = \frac{a}{2}; \quad \text{DC} = a;$$

y por consiguiente,

$$\left.\begin{aligned} \text{vol. CDEI} &= \frac{19\pi a^3\sqrt{3}}{24} \\ \text{vol. BCI} &= \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24} \end{aligned}\right\}, \text{ de donde resulta } \text{V} = \frac{5\pi a^3\sqrt{3}}{3}.$$

PROBLEMA IV.

710. *Valuar el volúmen engendrado por una figura plana simétrica respecto á un eje, que gira alrededor de una recta paralela á este, y trazada en su mismo plano.*

Sea XY (fig. 276) el eje de simetría de la curva propuesta : inscribamos en esta un polígono cualquiera ABCDEFGH que sea simétrico con relacion á XY, y busquemos los volúmenes engendrados por los triángulos ABH y DEF, y por los trapecios HC y GD.

El primero es la diferencia de los dos troncos de cono IABK é IAHK, y tiene por medida

$$\tfrac{1}{3}\pi\text{IK} . (\overline{\text{BK}}^2 + \overline{\text{AI}}^2 + \text{BK} . \text{AI} - \overline{\text{AI}}^2 - \overline{\text{HK}}^2 - \text{AI} . \text{HK}).$$

Pero como $\overline{\text{BK}}^2 - \overline{\text{HK}}^2 = (\text{BK} + \text{HK})\ (\text{BK} - \text{HK}) = 2\text{AI} . \text{BH}$, porque la diferencia entre los cuadrados de dos cantidades es igual al producto de la suma de estas por su diferencia [nota (1) del número 396]; y como, por otra parte,

$$BK.AI - AI.HK = AI\,(BK - HK) = AI.BH\cdot$$

hallarémos, despues de reducir,

$$\pi AI.IK.BH;$$

pero IK.BH es el doble del área del triángulo ABH; luego

$$V = ABH.2\pi AI.$$

Por lo tanto, el teorema del n.° 699 es cierto tambien tratándose de un triángulo isósceles que gire alrededor de una recta trazada en su plano paralelamente al eje de simetría.

Prolongando los lados BC y GH hasta su interseccion O sobre XY, verémos que, siendo el trapecio BCGH la diferencia entre los triángulos COG y BOH, el volúmen que engendre tendrá por medida la diferencia entre los que engendren las áreas de aquellos, es decir, la de él mismo multiplicada por $2\pi AI$.

Luego el volúmen engendrado por el polígono simétrico ABCDEFGH tiene por medida el producto de su área por $2\pi AI$.

La verdad de este resultado subsiste cualquiera que sea la magnitud de los lados y ángulos del polígono propuesto; luego subsistirá cuando los lados sean infinitamente pequeños, es decir, cuando el polígono haya llegado á su límite, que es la figura propuesta. Luego *el volúmen engendrado por una superficie plana simétrica respecto á un eje, cuando ha girado alrededor de una recta paralela á este eje, trazada en su mismo plano, tiene por medida el área de esta superficie multiplicada por la circunferencia que describe un punto cualquiera del eje de simetría.*

PROBLEMA V.

711. *Hallar el volúmen que engendra un octógono regular cuando gira alrededor de uno de sus lados.*

Se vé fácilmente que el triángulo KBC (fig. 277) es isósceles, y por lo tanto, $BK = KC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; luego $BE = a(1 + \sqrt{2})$; y como esta recta es evidentemente doble que la apotema, será el área del octógono igual á

$$2a^2(1+\sqrt{2}). \text{ Luego } V=2\pi a^3(1+\sqrt{2}) \text{ [1]}.$$

Problema VI.

[illegible]. *Valuar el volúmen que tiene un cuerpo, de cualquier figura que sea.*

El medio que se presenta mas naturalmente para conseguirlo es descomponerle en partes cuyos volúmenes se puedan calcular con facilidad. Suponiendo que se haga resbalar una línea recta sobre la superficie del cuerpo, de tal modo que permanezca en todo su movimiento perpendicular á un plano dado, engendrará un cilindro cuya base ABCDEF (fig. 278), situada en el plano de que se trata, será la proyeccion sobre este del cuerpo. Divídase esta base por dos séries de líneas rectas, perpendiculares entre sí y equidistantes unas de otras, hágase pasar por cada una un plano perpendicular al de la base, y de este modo quedará el cuerpo dividido en elementos, tales como M'P, que podrán considerarse como la diferencia entre dos troncos mP y mP' de paralelepípedos rectángulos, si se han tirado bastante próximas las líneas de division de la base. Pero el volúmen de cada uno de estos troncos es igual al área A de la base multiplicada por la cuarta parte de la suma de sus cuatro aristas; luego fácilmente se deduce, sacando A por factor comun, que el volúmen pedido tiene por medida el producto que resulte de multiplicar el área A por la cuarta parte de la suma de las aristas de todos los elementos en que se le haya descompuesto; y como habrá aristas que pertenezcan á 1, 2, 3 ó 4 elementos, se deduce que, *para tener el volúmen de un cuerpo, hay que dividir su proyeccion sobre un plano cualquiera en rectángulos por medio de dos séries de rectas, tanto mas próximas cuanta mas exactitud se quiera: despues, habiendo levantado perpendiculares en los vértices de cada uno de los rectángulos, medir las partes de estas interceptadas por la superficie del cuerpo propuesto; y por último, multiplicar el área de uno de los rectángulos en que se ha descompuesto la proyeccion del cuerpo por una suma compuesta de las partes de dichas perpendiculares que corresponden á un vértice comun á cuatro rectángulos, de las tres cuar-*

---

[1] Este problema está sacado de la *Geometría* de M. Catalan.

tas partes, de la mitad y de la cuarta parte de las que corresponden á un vértice comun á tres, á dos y á uno de estos rectángulos.

En marina hay necesidad de medir el volúmen de la parte de carena de un buque sumergida en el agua, y para conseguirlo, se toma por plano de proyeccion el vertical que pasa por la quilla, y se aplica la regla precedente.

* **713.** Escolio. Obsérvese bien que los elementos en que se ha descompuesto el cuerpo no tienen todos por bases rectángulos, sino que las de algunos son nada mas que partes de esta figura. En tal caso, se desprecia los que á simple vista parezca que la tienen menor que la mitad de un rectángulo, y se considera á los otros como elementos enteros.

Problema VII.

* **714.** *Valuar el volúmen de la parte de un cuerpo que resulte de cortarle por dos planos paralelos.*

Divídase el espesor de esta parte en un número suficiente de partes iguales; tírense por los puntos de division planos paralelos á las bases, y proyéctense todas las zonas elementales en que resulte descompuesto sobre un plano perpendicular á todos los secantes. Sea AB′ (fig. 279) una de estas proyecciones. Hágase de AB cierto número de partes iguales, y por los puntos de division háganse pasar planos CC′, DD′... perpendiculares á la misma recta, y quedará así dividida la zona en elementos, que tendrá cada uno por medida el área de uno de los rectángulos elementales multiplicada por la cuarta parte de la suma de sus cuatro aristas. Así pues, designando á estas respectivamente por a y a', b y b', c y c',... se tendrá para espresion del volúmen v de la zona AB′

$$v = \mathrm{AC}.\mathrm{CC}'.\frac{a+a'+2c+2c'+2d+2d'+\ldots+b+b'}{4},$$

ó
$$v = \mathrm{CC}'.\frac{\mathrm{AC}}{2}\left(\frac{a+a'+b+b'}{2}+c+c'+d+d'+\ldots\right).$$

Pero, llamando A y A′ las áreas de las bases de la zona, se tendrá (389)

$$\mathrm{A} = \mathrm{AC}\left(\frac{a+b}{2}+c+d+\ldots\right),$$

y $$A' = AC\left(\frac{a'+b'}{2} + c' + d' + \ldots\right);$$

y por ultimo, $$v = \frac{A+A'}{2}.CC'.$$

Traduciendo esta fórmula, podemos decir que el volúmen de una cualquiera de las zonas elementales es igual á la semi-suma de las áreas de sus bases multiplicada por su espesor; y de aquí deducimos fácilmente, razonando como en el n.° 389, que, *para valuar el volúmen de una parte de un cuerpo, hay que dividir su espesor en un número suficientemente grande de partes iguales, tirar por los puntos de division planos paralelos á los de las bases, sumar la semi-suma de las áreas de estas bases con las de todas las secciones intermedias, y multiplicar el resultado por la distancia entre dos planos paralelos consecutivos.*

Esta regla es principalmente útil para valuar el volúmen de un cuerpo terminado por una superficie de revolucion; porque suponiendo que los dos planos límites son perpendiculares al eje en los puntos en que este corte á la superficie, todas las secciones resultarán círculos, y es muy fácil valuar sus áreas.

Problema VIII.

* **715.** *Valuar el área de cualquier superficie curva.*

Sea ABCDE (fig. 278) la proyeccion de la superficie sobre un plano cualquiera. Operando como en el n.° **712**, se descompondrá la superficie en cuadriláteros curvilíneos, que podrán considerarse como planos, con tanto menos error, cuanto mas próximos se tiren los planos secantes. Sea A el área de uno MNPQ de estos pequeños cuadriláteros, y a la de su proyeccion $mnpq$. Si convenimos en llamar m, n, p, q á las perpendiculares mm', nn', pp', qq' bajadas desde los vértices de esta proyeccion sobre el plano del cuadrilátero PM y M, N, P, Q las bajadas desde los vértices de este sobre el plano de proyeccion, se hallarán para espresion de la medida del volúmen del tronco de paralelepípedo mP las dos espresiones

$$a.\frac{M+N+P+Q}{4} \quad \text{y} \quad A.\frac{m+n+p+q}{4},$$

ó, dividiendo la segunda por la primera y multiplicando por a,

$$A=a.\frac{M+N+P+Q}{m+n+p+q}.$$

Pero siendo equiángulos los triángulos rectángulos Mmm', Nnn',... porque los ángulos del mismo nombre son los que miden la inclinacion del plano del cuadrilátero PM sobre el de proyeccion, se puede establecer que

$$\frac{M}{m}=\frac{N}{n}=\frac{P}{p}=\frac{Q}{q};$$

de las que se obtiene

$$\frac{M+N+P+Q}{m+n+p+q}=\frac{M}{m}, \text{ y por lo mismo, } A=a.\frac{M}{m}.$$

Así pues, llamando A', M' y m', A'', M'' y m'',... las cantidades que, en los otros cuadriláteros en que se ha descompuesto la super ficie que se mide, sean análogas á A, M y m, hallarémos para la espresion del área X que se busca

$$X=a\left(\frac{M}{m}+\frac{M'}{m'}+\frac{M''}{m''}+\ldots\right);$$

de modo que no hay mas que determinar que las perpendiculares $M, M', M'',\ldots.\ m, m', m'',\ldots$ de las cuales las primeras se pueden medir inmediatamente, y respecto á las segundas, se las puede obtener como sigue. Rebátanse las caras mN y mQ del tronco mP sobre el plano de proyeccion, y prolónguense los lados MN y MQ (fig. 280) hasta que corten en R y S á los lados del ángulo nmq, y claro es que, uniendo R con S, tendrémos la traza del plano del cuadrilátero MNPQ sobre el de proyeccion; por consiguiente, tirando la mT perpendicular á RS, la que se baje desde m sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo que se forma uniendo el punto T con el M del espacio, será la recta pedida m. Pero TmM' es el rebatimiento de aquel triángulo sobre el plano de proyeccion; luego el de la perpendicular m que se busca es la línea mQ', fácil de medir [1].

---

[1] Para calcular m, observarémos que el triángulo rectángulo $M'mT$ nos da

$$\frac{M}{m}=\frac{M'T}{mT}; \text{ de donde sale } \frac{M^2}{m^2}=1+\frac{M^2}{mT^2}.$$

Pero tambien el triángulo mSR da que $mT.SR=mS.mR$; de consiguiente,

Problema IX.

716. En la *Física* de M. Biot se dice que, *dorando un cilindro de plata cuyo peso sea* 360 *onzas con* 6 *onzas de oro, puede sacarse de él un hilo de* 1351900 *piés de largo y* $\frac{1}{4}$ *de línea de grueso. Se quiere saber qué espesor tendrá la capa de oro, admitiendo con Reaumur que un pié cúbico de este metal pesa* 21220 *onzas, y uno de plata* 11523.

Sean AE (fig. 281) el paralelepípedo rectángulo que representa al hilo, L su longitud AB, l su latitud AD, y e su espesor AC. El volúmen estará representado por Lle. Segun los pesos que se dan del pié cúbico de oro y uno de plata, fácilmente se ve que $6^{\text{onz.}}$ de oro y $360^{\text{onz.}}$ de plata son los respectivos pesos de $844^{\text{l.c}},293$ del primer metal y de $93287^{\text{l.c}},702$ del segundo; de modo que $Lle=94131,995$; ecuacion que determina e, puesto que L y l son conocidas (se ha tomado la línea por unidad lineal). Así, hallarémos $e=\frac{1^{\text{l}}}{258,5}$.

Siendo el espesor x de la capa de oro el mismo en todo el cilindro, bastará para tener el volúmen multiplicar su área por x. Pero la de la cara superior es evidentemente Ll; la de la lateral es $L(e-2x)$, porque su altura es bf, y como el volúmen de la capa es $844^{\text{l.c}},293$, tendrémos la ecuacion

$$2\{Ll+L(e-2x)\}x=844,293,$$

mas como x es una pequeñísima cantidad, porque es necesariamente mucho menor que e, podemos despreciar su cuadrado, lo cual reducirá esta ecuacion á

$$\frac{1}{mT^2}=\frac{\overline{SR}^2}{mS^2\cdot mR^2}=\frac{1}{mR^2}+\frac{1}{mS^2}\quad \text{y}\quad \frac{M^2}{m^2}=1+\frac{M^2}{mR^2}+\frac{M^2}{mS^2}.$$

Ahora bien, llamando b y c á los lados del rectángulo mp, y d y e á las diferencias M — N y M — Q, sacarémos de los triángulos semejantes MNI y MRm, KQM y MmS:

$$\frac{M}{mR}=\frac{d}{b},\quad \text{y}\quad \frac{M}{mS}=\frac{e}{c};\quad \text{luego}\quad \frac{M}{m}=\sqrt{1+\frac{d^2}{b^2}+\frac{e^2}{c^2}};$$

y por consiguiente

$$A=bc\sqrt{1+\frac{d^2}{b^2}+\frac{e^2}{c^2}},$$

que es la misma fórmula dada *por el método de las cuadraturas.*

$$2L(l+e)x = 364,208$$

de la que, calculando por logaritmos,

$$x = \frac{1}{59428} \text{ de línea.}$$

717. Cuando el cuerpo cuyo volúmen se quiere conocer es de una forma muy irregular, viene á ser impracticable, por largo, el método que acabamos de esplicar. En este caso puede ponérsele en una vasija cuya capacidad se haya calculado anteriormente, y midiendo la cantidad de agua ó de arena fina que sea necesaria para acabar de llenar la vasija, bastará una sencilla resta para tener resuelto el problema.

Si fuere un volúmen muy pequeño, se le sumergirá en un vaso lleno de agua, y midiendo en gramos el peso de la que haya desalojado del vaso, se conocerá el volúmen de esta agua, y por consiguiente, el del cuerpo sumergido, en centímetros cúbicos (*Aritmética*, n.° 168). Obsérvese, sin embargo, que si fuera necesaria una gran exactitud, habria que tener en cuenta la temperatura del agua, como se enseña en los tratados de física.

718. Tambien se puede determinar el volúmen de los cuerpos por sus *pesos específicos. Así se llama la relacion entre el peso de un volúmen determinado de la sustancia de este cuerpo, y el de uno igual de agua destilada.* Por lo tanto, *multiplicando el volúmen de un cuerpo valuado en decímetros cúbicos por su peso específico, se tendrá el peso en kilógramos del mismo cuerpo;* y por consiguiente, *dividiendo el peso de un cuerpo por su peso específico se tendrá en decímetros cúbicos su volúmen.* Estas dos reglas son de una aplicacion muy frecuente en las artes.

PRIMER EJEMPLO. *Calcular el diámetro interior de un tubo de vidrio.*

Se le pesará, tomando por unidad el *gramo*. Volverá á pesársele despues de introducir en él una cantidad determinada de mercurio, y la diferencia entre los dos pesos obtenidos será evidentemente el de una columna de mercurio del mismo diámetro que el tubo; luego dividiendo este peso por 13,599, peso específico del mercurio, *se tendrá* en centímetros cúbicos *el volúmen de la columna.* Si se ha cuidado de medir su longitud, el cociente de dividir este volúmen por aquella longitud será el área de la seccion del tubo, espresada en centímetros cuadrados (684). Solo faltará ya, para tener el problema completamente resuelto, dividir esta área por π, y estraer la raiz cuadrada del cociente (380).

SEGUNDO EJEMPLO. *La columna de Severo, junto á Alejandría, está formada de una pieza de granito que tiene* 30^{m} *de alta por* 3^{m} *de diámetro, descansando en un pedestal cúbico de mármol, de* 5^{m} *de lado. ¿Cuál es su peso con menos de un kilógramo de error?*

El área de la base es $\frac{\pi}{4}.9$; luego el volúmen total de la columna es de $\left(\frac{\pi}{4}.9.30\right)^{m.c}$, y el del pedestal $125^{m.c}$; pero siendo respectivamente los pesos específicos del granito y del mármol 2,716 y 2,960, un metro cúbico del primero pesará 2716^{kg}, y uno del segundo 2960; luego el peso de la masa total será

$$\left(\frac{\pi}{4}.9.30.2716+125.2960\right)^{kg}.$$

Pero $\frac{9.30.2716}{4}=183330$, por consiguiente, para que el error no llegue á un kilógramo es preciso que el valor de π esté aproximado hasta una millonésima (*Aritm.*, **342**); y así, tomarémos $\pi=3,141593$, y tendrémos por resultado 945948 kilógramos.

TERCER EJEMPLO. *Calcular en francos el valor de un tetráedro regular de oro, de* 5 *centímetros de lado, sabiendo que la proporcion del oro con la plata es* 15,5 (*Aritm.*, **168**), *y suponiendo que el peso específico del oro sea* 19.

Fundándose en los valores dados en el n.° **336**, se hallará fácilmente que el volúmen de un tetráedro regular, cuya arista sea a, tiene por medida $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$; luego en virtud de la regla del núm. **718**, el peso del tetráedro será $\frac{125.19.\sqrt{2}}{12}$ gramos; de modo que si fuese de plata, valdria $\frac{125.19.\sqrt{2}}{12.5}$ francos; pero como es de oro, valdrá

$$\frac{125.19.\sqrt{2}.15,5}{12.5}=\frac{125.19.3,1.\sqrt{2}}{12}=3005 \text{ francos.}$$

CUARTO EJEMPLO. *¿Cuál es, con un error que no llegue á un milímetro, el diámetro de una bola de hierro de* 12 *kilógramos, suponiendo que el peso específico de este metal sea* 7*?*

Sea x el diámetro de esta bola espresado en decímetros, y tendrémos para espresion de su volúmen $\frac{1}{6}\pi x^3$, y por lo tanto, para la de su peso, $\frac{7}{6}\pi x^3$ kilógramos; luego

$$\frac{7}{6}\pi x^3=12,\text{ de donde } x=\sqrt[3]{\frac{72}{7\pi}}.$$

Siendo x un número de decímetros, y debiendo su valor ser exacto en menos de un milímetro, se tratará de estraer la raiz cúbica de $\frac{72}{7\pi}$ en menos de una centésima, para lo cual se multiplicará este número por 100^3, y se averiguará con qué grado de aproximacion debe valuarse π para tener el valor de $\frac{72000000}{7\pi}$ en menos de una unidad. Aplicando la regla del n.° 345 de la *Aritmética*, verémos que el valor de π debe calcularse con un error menor que una billonésima. Se hará $\pi=3{,}141592654$, y efectuando los cálculos, se encontrará que $x=148$ milímetros.

QUINTO EJEMPLO. *¿Cuál es el diámetro de un hilo de platino que pesa 1 gramo y cuya longitud es de un kilómetro, suponiendo que el peso específico del platino sea 22?*

Siendo el gramo la unidad de peso, se tomará el centímetro por la lineal, y tendrémos para ecuacion del problema

$$22.100000\pi.x^2=1,\text{ de donde } x=\sqrt{\frac{1}{2200000\pi}}.$$

CAPÍTULO II.

COMPARACION DE VOLÚMENES.

TEOREMA I.

719. *Los volúmenes de dos pirámides semejantes son proporcionales á los cubos de sus aristas homólogas.*

Siendo semejantes las dos pirámides *sabcde* y SABCDE (fig. 242), serán iguales los ángulos poliedros *s* y S, y podrá colocarse la primera sobre la segunda, de modo que coincidan las aristas homólogas de estos dos ángulos. En esta disposicion, la base *abcde* se encontrará colocada en A′B′C′D′E′ paralelamente á la ABCDE; luego la altura SO quedará cortada en el punto O′ en partes proporcionales á SA y SA′, y por consiguiente, á AB y A′B′; de manera que se tendrá

$$\frac{SO}{SO'} \text{ ó sea } \frac{SO}{so} = \frac{AB}{A'B'} \text{ ó bien } \frac{AB}{ab}.$$

Pero tambien por la semejanza de las bases de ambas pirámides se verifica

$$\frac{ABCDE}{abcde} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{bc}^2}.$$

por lo que, multiplicando ordinariamente estas dos proporciones, y dividiendo los dos términos de la primera razon por 3, se encontrará

$$\frac{ABCDE.\frac{1}{3}SO}{abcde.\frac{1}{3}so} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{ab}^3},$$

lo que demuestra el teorema (689).

Teorema II.

720. *Los volúmenes de dos poliedros semejantes son proporcionales á los cubos de sus aristas homólogas.*

En efecto, podemos dividir los dos poliedros en un mismo número de tetráedros semejantes uno por uno y semejantemente colocados, y despues formar otras tantas proporciones, para espresar que *cada uno de los tetráedros del primer poliedro* ES *al que le corresponde en el segundo*, COMO *el cubo de una de sus aristas* ES *al de la arista homóloga del otro tetráedro*. Pero siendo los poliedros semejantes, sus aristas y sus diagonales homólogas, y por tanto, los cubos de estas aristas y de estas diagonales son proporcionales; con que las segundas razones de todas las proporciones son iguales, por ser relaciones de los cubos de aristas ó de diagonales homólogas de los dos poliedros. Las primeras razones son entonces tambien iguales, y forman una série de fracciones cuyos numeradores son los tetráedros del primer poliedro, y los denominadores los correspondientes del segundo; por lo tanto, aplicando el principio del n.° 105 de la *Aritmética*, la suma de todos estos numeradores, es decir, el volúmen del primer poliedro, etc. (Conclúyase como en el n.° 400).

TEOREMA III.

721. *Los volúmenes de los conos, troncos de cono, cilindros, sectores esféricos, de las cuñas, rebanadas y segmentos esféricos semejantes, son proporcionales á los cubos de sus líneas homólogas.*

Será fácil demostrar estas proposiciones imitando las demostraciones del capítulo II, libro IX. Si por ejemplo se consideran dos troncos de cono semejantes, llamando V, R, r y h, el volúmen, los radios de las bases y la altura del uno, y con las mismas letras, acentuadas las cantidades correspondientes del segundo, se tendrá (695)

$$[1] \qquad \frac{V}{V'}=\frac{(R^2+r^2+Rr)h}{(R'^2+r'^2+R'r')h'};$$

pero como

$$\frac{R}{R'}=\frac{r}{r'},$$

multiplicando las dos razones de la proporcion por $\frac{r}{r'}$, resultará

$$\frac{Rr}{R'r'}=\frac{r^2}{r'^2}=\frac{R^2}{R'^2}=\frac{h^2}{h'^2};$$

de donde se saca

$$\frac{Rr+r^2+R^2}{R'r'+r'^2+R'^2}=\frac{h^2}{h'^2}.$$

Multiplicando, en fin, la proporcion [1] por esta, se encontrará, despues de haber simplificado,

$$\frac{V}{V'}=\frac{h^3}{h'^3},$$

que es lo que se queria demostrar.

TEOREMA IV.

722. *Los volúmenes de dos esferas son proporcionales á los cubos de sus radios.*

Esto resulta evidentemente de que la espresion del volúmen de una esfera es $\frac{4}{3}\pi R^3$.

PROBLEMA.

723. *Describir una esfera doble de otra.*

La cuestion se reduce evidentemente á encontrar la arista de un cubo doble de otro, lo que no puede hacerse *exactamente* no empleando mas que la regla y el compás. Véase aquí un método que da siempre, *con un error menor que media centésima del lado del cubo propuesto*, el del cubo pedido.

Sobre una recta AR (fig. 282), triple del lado OR que se da, descríbase una circunferencia; únase el punto O con cualquiera de los estremos B del diámetro BC perpendicular á AR; la prolongacion OX de la línea BO será la arista del cubo doble del que tiene á OR por lado.

En efecto, se tiene (257)

$$OX.OB=AO.OR;$$

de donde

$$OX=\frac{AO.OR}{OB}=\frac{2OR.OR}{\sqrt{\overline{BI}^2+\overline{IO}^2}};$$

pero $BI=AI=\frac{3}{2}OR$, ó $IO=\frac{1}{2}OR$; luego

$$OX=OR.\tfrac{2}{5}\sqrt{10}=1,26491.OR.$$

Mas el valor exacto de la arista buscada es

$$x=OR.\sqrt[3]{2}=1,25992.OR;$$

por lo tanto, el error cometido es

$$(1,26491-1,25992).OR=0,00499.OR<\tfrac{1}{200}OR.$$

LIBRO UNDÉCIMO.

DE ALGUNAS CURVAS USUALES.

CAPÍTULO PRIMERO.

DE LA ELIPSE.

724. *La* ELIPSE *es una curva plana tal, que la suma de las distancias de cada uno de sus puntos á dos fijos es constante. Estos dos puntos se llaman los* FOCUS *de la curva.*

En virtud de esta definicion, si M, M′, M″... son varios puntos de una elipse cuyos focus sean F y F′ (fig. 283), se tendrá

$$FM+F'M=FM'+F'M'=FM''+F'M''=\dots$$

Las dos líneas rectas que, como FM y F′M, unen un punto cualquiera de la curva con los focus, se llaman *radios vectores*, y la semi-distancia FO de los dos focus es la *escentricidad* de la elipse.

De la definicion de la elipse resulta inmediatamente cómo se ha de resolver el siguiente

Problema I.

725. *Describir una elipse, conociendo la distancia de los dos focus y la suma de los radios vectores de un punto cualquiera.*

1.° *Construccion de la elipse por puntos.* Sean F y F′ (fig. 284) los dos focus, y PQ una longitud igual á la suma constante de los radios vectores de un punto cualquiera de la curva. Llevo sobre FF′, y á ambos lados del punto O, medio de esta línea, dos longitudes OA, OA′ iguales á la mitad de PQ; es claro que los puntos A y A′ pertenecerán á la elipse, porque FA=F′A′, y por consiguiente,

$$FA+F'A=FA'+F'A'=AA'=PQ.$$

Para construir otros puntos de la curva, tomo sobre AA′ un punto cualquiera C; despues, desde cada uno de los focus F y F′ como centros, y tomando sucesivamente por radio AC y A'C, describo cuatro arcos de círculo que se corten dos á dos por arriba y por debajo de AA' en M, M', M'' y M'''; estos cuatro puntos pertenecerán á la elipse, porque la suma de los radios vectores de cada uno de ellos es igual á $AC + A'C = AA' = PQ$. Se tomará en seguida un segundo punto C', y repitiendo la construccion precedente con los radios AC' y A'C', se determinarán cuatro nuevos puntos de la elipse. Despues de haber construido de esta manera un cierto número de puntos, no faltará mas que unirlos por un trazo contínuo; y se tendrá así una curva que representará la elipse buscada, con tanta mas exactitud, cuanto mayor sea el número de puntos obtenidos.

Para que los arcos descriptos desde F, F' con los radios AC, A'C puedan cortarse, es necesario (104) que la distancia FF' sea menor que la suma de estos radios y mayor que su diferencia. La primera condicion está evidentemente cumplida; y la segunda exige, suponiendo el punto C á la derecha de O, que se tenga

$$FF' > A'C - AC,$$

ú observando que $FF' = A'C + AC - 2AF$,

$$A'C + AC - 2AF > A'C - AC,$$

desigualdad que se reduce, trasponiendo y simplificando, á

$$AC > AF.$$

Se probaria lo mismo, si el punto C estuviese á la izquierda de O, que $A'C > A'F'$; luego el punto C deberá estar tomado entre los dos focus.

2.° *Trazado de la elipse por movimiento contínuo.* Se fijarán en los dos focus los estremos de un hilo flexible é inestensible, cuya longitud sea igual á la suma de los radios vectores, y se estenderá en seguida este hilo por medio de un lápiz; despues se hará resbalar este de manera que el hilo esté siempre tiránte, y la elipse quedará trazada cuando la punta haya dado una vuelta entera. Es claro, en efecto, que, en cada posicion del lápiz, la suma de sus distancias á los dos focus es igual á la longitud constante del hilo.

Tal es el procedimiento que emplean los jardineros para trazar una elipse sobre el terreno, pues colocan en los focus dos piquetes, fijan en ellos los cabos de una cuerda, y hacen mover un tercer piquete á lo largo de esta, teniéndola constantemente estendida.

726. Suponiendo que la longitud del hilo permanezca constante, y que los dos focus se aproximen y concluyan por confundirse, la curva descripta por la punta del lápiz se convertirá en una circunferencia de círculo cuyo centro es O, y su diámetro AA′ (fig. 283), y esto hace ver que la *circunferencia de círculo puede mirarse como una elipse cuya escentricidad es igual á cero.*

Teorema I.

727. *La elipse tiene dos ejes de simetría rectangulares.*

Digo que la elipse es simétrica respecto á la línea AA′ de los focus (fig. 285), y á la perpendicular BB′ levantada sobre esta línea por su medio O. En efecto, desde un punto cualquiera M de esta curva bájese sobre AA′ una perpendicular MP, y prolónguesela una cantidad $M'P = MP$; el punto M′ será el simétrico de M respecto á AA′ (501, nota (1)), y es claro que pertenecerá á la elipse; porque si doblamos la figura á lo largo de AA′, el punto M caerá sobre M′, y los radios vectores FM, F′M cubrirán exactamente á las líneas FM′, F′M′; luego

$$FM' + F'M' = FM + F'M.$$

En segundo lugar, construyamos el punto M″ simétrico del M con relacion á BB′; digo que este punto pertenecerá tambien á la elipse. Unamos, en efecto, M″ con F y F′; las líneas F′M y FM″ se cortarán en un mismo punto I de BO (254); si ahora se dobla la figura á lo largo de BB′, los puntos M y F caerán respectivamente en M″ y en F′, y los radios vectores del punto M cubrirán exactamente á los del punto M″; luego

$$FM'' + F'M'' = FM + F'M.$$

728. Los puntos A, A′, B, B′ toman el nombre de *vértices.* AA′ es el *eje mayor*, y BB′ el *menor* de la elipse.

La suma de los radios vectores de un punto cualquiera es igual al eje mayor. En efecto,

$$FM + F'M = FA + F'A = F'A' + F'A = AA'.$$

729. Es, desde luego, evidente que $BB' < AA'$; en efecto, se tiene en el triángulo rectángulo OBF, $OB < FB$; mas siendo iguales los radios vectores FB, F′B, cada uno de ellos es igual á la semi-suma de los radios vectores de un punto cualquiera, es decir (728), á $\frac{1}{2}$AA'=OA; luego OB<OA, y por consiguiente, 2OB ó BB'<2OA ó AA'.

730. Se designan ordinariamente las longitudes AA', BB', FF', por $2a$, $2b$, $2c$, y el triángulo rectángulo BOF da la relacion

$$a^2=b^2+c^2.$$

Se saca de esta:

$$b^2=a^2-c^2=(a+c)(a-c)=\text{A'F.AF ó A'F'.F'A};$$

es decir, que *cada focus divide al eje mayor en dos segmentos cuyo producto es igual al cuadrado del semi-eje menor.*

Problema II.

731. *Construir una elipse conociendo las longitudes de sus dos ejes.*

Segun lo que antecede (730), desde uno de los vértices del eje menor como centro con una abertura de compás igual á la mitad del mayor, se describirán dos arcos de círculo cuyas intersecciones con el eje mayor determinarán los focus de la elipse, y será fácil entonces construir la curva, sea por puntos, sea de una manera continua (problema I).

732. El punto de interseccion O de los dos ejes es el centro de la elipse (203). Es fácil demostrar que toda recta terminada en la elipse y que pasa por este punto queda dividida en él en dos partes iguales. Sea M un punto de la elipse (fig. 286); unamos M con O, y prolonguemos esta línea una cantidad OM'=MO; los triángulos FM'O, F'M'O serán respectivamente iguales á los F'MO, FMO (181); luego

$$\text{FM'}=\text{F'M},\ \text{F'M'}=\text{FM};$$

por lo que

$$\text{FM'}+\text{F'M'}=\text{FM}+\text{F'M},$$

y por consiguiente, el punto M' pertenece á la elipse.

733. Conforme á la definicion que hemos dado de la elipse, la suma de las distancias de cada uno de sus puntos á los dos focus es constante, y hemos visto que esta suma era igual al eje mayor (728). Nos falta hacer ver que los puntos de la elipse son los únicos que gozan de esta propiedad. Si se consideran dos cualesquiera K y K' (figura 287), uno esterior y otro interior á esta curva, se tendrá evidentemente (31)

$$F'K+KF>F'M+MF=AA'$$
$$F'K'+K'F<F'M+MF=AA',$$

por lo que se puede establecer el

Teorema II.

La suma de las distancias de los dos focus á un punto situado fuera de la elipse ó en el interior de esta curva, es mayor ó menor que el eje mayor.

El recíproco de este teorema es verdadero, y da el medio de reconocer si un punto dado sobre el plano de una elipse está dentro ó fuera de ella, cuando esta curva no se halla trazada, y solamente determinada por sus ejes.

Teorema III.

734. *La tangente* TMT' *á la elipse forma ángulos iguales* TMF, T'MF' *con los radios vectores* MF, MF' *tirados al punto de contacto* M (figura 288).

Tiremos por este punto M una secante cualqüiera MM', y unamos M' con F y F'; desde F como centro con FM por radio describamos un arco de círculo que corte en N á la prolongacion de FM', y rebatamos tambien F'M en la F'P sobre F'M', y se tendrá

$$FM+F'M=FM'+F'M';$$

de donde se saca

$$FM-FM'=F'M'-F'M,$$

ú observando que por construccion $FM=FN$ y $F'M=F'P$,

$$M'N=M'P.$$

Ahora, tiremos por los focus F y F' las rectas FG y F'H respectivamente paralelas á las cuerdas MN y MP, y sus puntos de interseccion G y H con la secante MM', determinan dos triángulos M'FG, M'F'H, que tienen dos lados proporcionales uno á uno. En efecto, los triángulos M'FG y M'MN, M'F'H y M'PM son semejantes como equiángulos entre sí; luego tienen sus lados proporcionales, y por lo tanto

$$\frac{M'G}{M'F}=\frac{M'M}{M'N} \text{ y } \frac{M'H}{M'F'}=\frac{M'M}{M'P};$$

pero hemos visto que $M'N=M'P$; por consiguiente,

[1] $$\frac{M'G}{M'F}=\frac{M'H}{M'F'}.$$

Supongamos ahora que la secante MM' gire alrededor del punto M, de modo que el M' se aproxime á este indefinidamente; es claro que en este movimiento el punto P irá aproximándose indefinidamente al M, esto es, que la cuerda MP tenderá á hacerse tangente en M á la circunferencia que se ha descrito desde F' como centro con F'M por radio; luego en el límite cuando la secante MM' se haya convertido en la tangente TMT' (514), la cuerda MP será perpendicular á F'M, y lo mismo se verificará con la F'H', límite de la paralela F'H; luego el ángulo H'F'M será recto. Por la misma razon la recta FG', límite de FG, habrá quedado perpendicular á FM, y el ángulo G'FM será recto. Pero en este movimiento la proporcion [1] no habrá dejado de subsistir; luego se tendrá aun

$$\frac{MG'}{MF}=\frac{MH'}{MF'}.$$

Los dos triángulos rectángulos H'F'M y G'FM, por tener sus hipotenusas respectivamente proporcionales á los otros dos lados, serán semejantes, y por lo tanto, equiángulos; luego el ángulo FMT será igual al F'MT', que es lo que se queria demostrar (1).

735. Corolario. *La bisectriz* MN *del ángulo* FMF' *formado por los radios vectores de un punto* M *de la elipse*, *es la* normal *en este punto* (figura 290). Se tiene, en efecto,

---

(1) Se puede decir tambien: sea la tangente TMT' (fig. 289), que puede considerarse como la prolongacion del *elemento* MM' de la elipse (514). Desde los focus F y F' como centros, con los radios respectivos FM' y F'M', describo los arcos de círculo M'R y M'S, y se tendrá

$$FM+F'M=FM'+F'M',$$

de donde se deduce $$FM-FM'=F'M'-F'M,$$

ó $$MR=MS.$$

Pero se puede tomar por el arco infinitamente pequeño M'R, el elemento de la tangente á este arco en el punto R, el cual es perpendicular á MR; podrémos tambien sustituir al arco M'S el elemento de la tangente al mismo en el punto S, que es perpendicular á MS. Así, que pueden considerarse que los dos triángulos rectángulos MRM' y MSM', son iguales por tener la misma hipotenusa MM' y un lado igual MR=MS; luego el ángulo TMS=FMT. Pero el TMS es igual al F'MT', por ser opuestos por el vértice; luego, en fin, FMT=F'MT'.

el ángulo FMT = al F'MT', ángulo FMN = al F'MN,

de donde, sumando miembro á miembro estas dos igualdades,

ángulo NMT = al NMT';

luego MN es perpendicular á la tangente TMT' (36).

* **736.** Una vez que la normal á la elipse divide en dos partes iguales al ángulo formado por los radios vectores tirados desde los focus á un mismo punto de la curva, *el* PIÉ N *de la normal es el punto armónico conjugado del* T *de la tangente con relacion á los focus* (véase el *Apéndice* al libro III).

737. Como se sabe que un cuerpo elástico que choca en un plano, refleja, formando el ángulo de reflexion igual al de incidencia, si un cuerpo de esta naturaleza se arroja desde un focus de la elipse en el plano de esta curva, de modo que choque en ella, reflejará en el otro focus; porque tocando la curva será lo mismo que si tocase la tangente en el punto de incidencia. Luego los radios lumínicos, caloríficos ó sonoros que emanen de uno de los focus de una elipse, concurrirán todos en el otro focus. A esta propiedad deben estos puntos su denominacion.

738. Si en la figura 290 se prolonga el radio vector F'M una cantidad MG = FM, y se une G con F, la tangente TMT' será perpendicular en el medio de GF; porque los dos triángulos MPG, MPF tienen un ángulo igual GMP = FMP (50 y 734), comprendido entre lados iguales, porque MG = FM, y el lado MP es comun: son entonces iguales, y por lo mismo GP = FP, y el ángulo MPG = MPF.

Si desde un punto cualquiera S tomado sobre la tangente TMT', se tiran SF, SF' y SG, será SF = SG (56); luego

$$SF + SF' = SG + SF';$$

y como la línea quebrada SG + SF' es mayor que la recta F'G, la cual equivale á FM + F'M, será

$$SF + SF' > FM + F'M;$$

luego (733) *todos los puntos de la tangente á la elipse que no sean el de contacto están fuera de esta curva.*

TEOREMA IV.

739. *El lugar geométrico de las proyecciones de los focus de una elipse sobre sus tangentes es la circunferencia de círculo descrita sobre el eje mayor como diámetro.*

En efecto, siendo la proyeccion P (fig. 290) del focus F sobre la tangente TMT′ el medio de FG (738), la recta OP que une este punto con el centro O de la elipse, será paralela á F′G (246), é igual á $\frac{1}{2}$ F′G $= a$. Luego el punto P se encuentra sobre la circunferencia descripta desde O como centro con a por radio.

740. ESCOLIO. Así, *cuando un ángulo recto* P″P′P (fig. 291) *se mueve de manera que su vértice* P′ *describa una circunferencia* OA, *y que uno de sus lados* P″P′ *pase siempre por un punto* F′ *interior á esta circunferencia, el otro lado* P′P *toca constantemente á una elipse que tiene por focus el punto* F′, *por centro el* O *de la circunferencia, y por eje mayor el diámetro de esta misma.*

TEOREMA V

741. *El producto de las distancias* FP, F′P′ *que hay desde los focus* F, F′ *de una elipse á una tangente cualquiera* TMT′ *es igual al cuadrado del semi-eje menor* (fig. 291).

Se tiene, en efecto

$$P''F'.F'P' = A'F'.F'A\ (257) = b^2\ (730);$$

mas, siendo inscripto el ángulo recto P″P′P, la cuerda P″P que le subtiende pasa por el centro O (127), y por consiguiente, los triángulos P″F′O, PFO son iguales (181 ó 183); luego P″F′ = FP, y $F'P'.FP = b^2$.

742. Pues que MG = MF y que F′G = $2a$, es claro que, si desde el focus F′ como centro se describe un círculo con un radio igual á $2a$ (fig. 290), todo punto M de la elipse estará equidistante de este círculo y del otro focus F. Se ha dado el nombre de *círculo director* de la elipse á cada uno de los descriptos desde los focus de esta curva como centros, con su eje mayor por radio.

743. La consideracion del círculo director de la elipse da un nuevo procedimiento para trazar esta curva cuando se conocen los focus y el eje mayor. Bastará describir el círculo director que tiene al focus F′, por ejemplo, por centro; despues, unir un punto cualquiera G de su circunferencia con el otro focus F: levantando sobre el medio I de FG una perpendicular TMT′, el punto M en que esta corte al radio F′G pertenecerá á la elipse, y la misma perpendicular será además la tangente á la curva en este punto.

Resulta de esta construccion que, *si desde un punto* F, *tomado en el interior de un círculo* F′G, *se tiran rectas á los diferentes puntos de su circunferencia, las perpendiculares levantadas en el medio de estas líneas serán todas tangentes á una misma elipse, que tendrá por focus el punto* F *y el centro* F′ *del círculo, y por eje mayor el radio* F′G *del mismo.*

Problema III.

744. *Tirar una tangente á la elipse: 1.° por un punto tomado sobre esta curva; 2.° por uno esterior; 3.° que sea paralela á una recta dada.*

1.° Sea M el punto dado sobre la curva (fig. 292). Tirando los dos radios vectores FM y F′M, bastará evidentemente dividir en dos partes iguales el ángulo FMG formado por uno de ellos y la prolongacion del otro (734), pues la bisectriz TMT′ de este ángulo será la tangente pedida.

2.° Sea S un punto esterior á la elipse (fig. 293). Desde él como centro, con su distancia á uno de los focus F por radio, describo una circunferencia; trazo en seguida el círculo director, que tiene por centro el otro focus F′ (742); y como estas dos circunferencias se cortarán en dos puntos G y G′ (104), tiro las rectas FG, F′G′, y bajando desde el punto S sobre ellas dos perpendiculares ST, ST′, tendré las tangentes pedidas. Los puntos M y M′ de contacto serán los de interseccion de estas perpendiculares con F′G y F′G′. Con efecto, únase F con M, y una vez que $SG=SF$, será ST perpendicular en el medio de FG: luego $FM=FG$; por consiguiente $FM+F'M=F'G=2a$, y por lo mismo el punto M pertenecerá á la elipse: además el triángulo FMG es isósceles, por lo cual ST divide en dos partes iguales al ángulo FMG, y es tangente á la elipse en el punto M (734). Se demostrará igualmente que SM′ es tangente en el punto M′.

Corolario. Si se observa que $SF=SG$, que si se prolonga FM′ una cantidad $M'M''=F'M'$, se tendrá $SM''=SF'$, y que, en fin, $FM''=2a=F'G$, se deducirá que los dos triángulos SM″F y SF′G son iguales (189); luego

$$\text{ángulo } FSM''=\text{al } GSF',$$

y por consiguiente, restando de cada uno de ellos la parte comun FSF',

ángulo F'SM''=al GSF,

de donde, dividiendo por 2,

1] ángulo F'SM'=al FSM.

Resulta tambien de la igualdad de los dos triángulos SM''F y SF'G, que los ángulos SFM'', SGF' son iguales; mas el SGF es igual al SFM; luego

[2] ángulo SFM''=al SFM.

Donde se ve que : 1.° *las dos tangentes* SM, SM' *tiradas á la elipse por un punto esterior* S, *forman ángulos iguales* FSM, F SM' *con las rectas que unen este punto con los focus;* 2.° *la recta* FS *que une este punto á uno de los focus* F, *divide en dos partes iguales al ángulo* MFM' *de los radios vectores tirados desde este focus á los puntos de tangencia.*

3.° Sea XY la direccion de la recta á la que debe ser paralela la tangente pedida (fig. 294). Construyo los puntos de interseccion Q y Q' del círculo director, descrito desde uno de los focus F' como centro, con la perpendicular tirada por el otro F sobre XY, y tiro F'Q, F'Q'. Levantando en los medios de FQ y FQ' las perpendiculares TT' y T''T''' se tendrá las tangentes pedidas, y los puntos M y M' de contacto se hallarán en la interseccion de estas perpendiculares con F'Q, F'Q'. En efecto, unamos F con M, y por ser TT' perpendicular á FQ en su medio, FM=MQ, luego FM+F'M=F'Q=2a y el punto M pertenecerá á la elipse. Además, los dos triángulos MIQ, MIF son iguales; por lo que el ángulo TMQ ó su igual F'MT' es igual á FMT, y TMT' la tangente á la elipse en el punto M. Lo mismo se verifica con la recta T''M'T'''.

Corolario. *Los puntos de contacto* M, M' *de dos tangentes paralelas son simétricos respecto al centro de la elipse.*

En efecto, siendo isósceles los triángulos QF'Q' y QMF, los ángulos QQ'F' y QFM son iguales al Q, y por consiguiente, iguales entre sí; luego MF es paralela á F'Q'. Se deduce tambien de la comparacion de los dos triángulos QF'Q' y FM'Q' que M'F es paralela á F Q; luego la figura F'MFM' es un paralelógramo, y sus diagonales se cortan mútuamente en dos partes iguales en su centro O, que, siendo el medio de FF′, es precisamente el centro de la elipse; luego OM = OM′.

745. Hemos visto (**726**) que la circunferencia podia ser mirada como una elipse cuyos focus coinciden con el centro; y entonces, para tirar á un círculo determinado por su centro y su radio una tangente que pase por un punto dado en su plano, se podrá emplear la construccion del n.° **744** (2.°), pues que esta construccion es independiente del valor de la escentricidad. Esto es lo que se ha hecho en el n.° **160**.

746. Obsérvese tambien que las construcciones precedentes solamente suponen que la elipse está determinada por su eje mayor y sus focus, y que no es necesario que se halle trazada.

Si, por el contrario, la elipse no estuviese mas que trazada, se construirian sus ejes por el método siguiente, que indicarémos sin demostracion: *se comenzará por trazar dos cuerdas paralelas cualesquiera* PP′, QQ′ (fig. 295), *y uniendo sus medios, se tendrá una línea* MM′ *que pasará por el centro* O *de la elipse; sobre este diámetro* MM′ *se describirá una semi-circunferencia, se unirá el punto* I *en que corta á la curva con los estremos de este diámetro, y no faltará mas que tirar por el centro paralelas á las cuerdas* IM, IM′. *Estas paralelas* OA, OB, *limitadas en la elipse, darán los ejes en magnitud y posicion.*

Teorema VI.

747. *El lugar geométricò de los vértices de los ángulos rectos circunscriptos á la elipse es un círculo concéntrico con esta curva, y cuyo radio es igual á la hipotenusa del triángulo rectángulo que tiene por lados los semi-ejes mayor y menor.*

Sean las dos tangentes rectangulares ST, ST′ (fig. 296): si desde el centro O bajo sobre sus direcciones las perpendiculares OE, OD, la figura ODSE será un rectángulo, y proyectando los focus sobre la tangente ST′, se tendrá (**741**)

$$\mathrm{FP}.\mathrm{F'P'}=b^2,$$

ó

$$(\mathrm{PI}+\mathrm{IF})(\mathrm{P'I'}-\mathrm{I'F'})=b^2$$

Pero PI = P′I′ = OD, é IF = I′F′; luego

[1] $$\overline{\mathrm{OD}}^2-\overline{\mathrm{IF}}^2=b^2.$$

Proyectando tambien los focus sobre la tangente ST, se encontrará

[2] $$\overline{OE}^2-\overline{KF}^2=b^2.$$

Sumando miembro á miembro las igualdades [1] y [2], y observando que $\overline{OD}^2+\overline{OE}^2=\overline{OS}^2$, y que $\overline{IF}^2+\overline{KF}^2=\overline{OE}^2$, tendremos

$$\overline{OS}^2-\overline{OF}^2=2b^2.$$

Pero $\overline{OF}^2=c^2=a^2-b^2$ (730); luego, en fin,

$$\overline{OS}^2-a^2+b^2=2b^2,$$

de donde se obtiene, reduciendo y trasponiendo,

$$\overline{OS}^2=a^2+b^2.$$

Teorema VII.

* 748. *Describiendo una circunferencia de círculo sobre el eje mayor de una elipse como diámetro, toda perpendicular á este eje determina en la elipse y en el círculo dos cuerdas que están entre sí en la razon del menor eje con el mayor.*

Sea NMQ (fig. 297) una perpendicular al eje mayor AA', y MQ, NQ las semi-cuerdas que intercepta en la elipse y en el círculo. Tiro en el punto M la tangente MT, y proyecto los focus en P y P' sobre esta tangente; los puntos P y P' se hallarán sobre la circunferencia OA (739). Siendo iguales los ángulos FMP, F'MP' (734), los dos triángulos rectángulos FMP, F'MP' son semejantes, y nos darán

$$\frac{MP}{MP'}=\frac{FP}{F'P'};$$

pero los FPT, F'P'T tambien lo son, y dan la proporcion

$$\frac{FP}{F'P'}=\frac{PT}{P'T},$$

luego, á causa de la razon comun $\frac{FP}{F'P'}$,

$$\frac{MP}{MP'}=\frac{PT}{P'T}.$$

Así, la secante PP′ está dividida en los puntos M y T en partes armónicas (792), y por lo tanto la recta NT es la tangente á la circunferencia OA en el punto N.

Ahora, observando que el triángulo rectángulo MQT es semejante á cada uno de los FPT, F′P′T, se tendrán las dos proporciones:

$$\frac{MQ}{FP}=\frac{QT}{PT},$$

$$\frac{MQ}{F'P'}=\frac{QT}{P'T};$$

que multiplicadas miembro á miembro, y observando que $FP.F'P' = b^2$ (741), y que $PT.P'T=\overline{NT}^2$ (256), se reducirán á

$$\frac{\overline{MQ}^2}{b^2}=\frac{\overline{QT}^2}{\overline{NT}^2},$$

de donde

$$\frac{MQ}{b}=\frac{QT}{NT}.$$

Pero resulta de los triángulos rectángulos ONQ y QNT, por ser equiángulos (260, 2.°), que la razon $\frac{QT}{NT}$ es igual á la $\frac{NQ}{ON}$; luego teniendo presente que $ON = a$,

$$\frac{MQ}{b}=\frac{NQ}{a},$$

ó en fin,

$$\frac{MQ}{NQ}=\frac{b}{a}.$$

* 749. Escolio. Este teorema presenta un nuevo procedimiento para trazar una elipse. Descríbanse las circunferencias OA, OB (figura 298), sobre cada uno de los ejes como diámetros, y tírese en cualquiera direccion un radio ON; despues trácense por los puntos L y N las rectas LM y NQ, la primera paralela, y la otra perpendicular al eje mayor, y su punto de interseccion M pertenecerá á la elipse, pues se tendrá

$$\frac{MQ}{NQ}=\frac{OL}{ON}=\frac{b}{a}.$$

Teorema VIII.

* 750. *Si una recta* RS *de longitud invariable se mueve de manera que sus dos estremos* R *y* S *resbalen sobre dos rectas rectangulares* XX′, YY′, *uno cualquiera* M *de sus puntos describirá una elipse que tendrá por semi-ejes las distancias* MR, MS *que hay desde este punto á los estremos de la recta móvil* (fig. 299).

Sea RSM una posicion cualquiera de la recta movible. Describo una circunferencia con MR por radio desde el punto O de interseccion de las rectas rectangulares XX′, YY′, y por el mismo punto tiro una paralela ON á RM, y uno despues N con M. Siendo iguales y paralelas las líneas ON y RM, la figura RONM será un paralelógramo, y por lo tanto, NM perpendicular á XX′; además, los triángulos semejantes NQO, MSQ dan

$$\frac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{NQ}}=\frac{\mathrm{MS}}{\mathrm{NO}}=\frac{\mathrm{MS}}{\mathrm{MR}};$$

luego el punto M pertenece á la elipse descripta con los semi-ejes $b=\mathrm{MS}$ y $a=\mathrm{MR}$ (748).

La demostracion seria la misma, si el punto descriptor M estuviese entre R y S. Si se encontrase en el medio de RS, la elipse se reduciria evidentemente á una circunferencia.

* 751. Escolio. El uso del *compás de elipses* está fundado en esta proposicion

Teorema IX.

* 752. *El área de la elipse es igual á la relacion de la circunferencia al diámetro multiplicada por el producto de sus semi-ejes;* es decir, que, designando esta área por A, y los dos semi-ejes por a y b, se tendrá

$$\mathrm{A}=\pi . ab.$$

Levantando sobre el eje mayor una série de perpendiculares infinitamente próximas, descompondrémos así el área de la elipse y la del círculo en fajas que podrán considerarse como trapecios, con tanto menos error, cuanto mayor sea el número de perpendiculares levantadas. Sean MPP′M′, NQQ′N′ (fig. 300) dos trapecios que se correspondan; teniendo estos la misma altura, sus áreas serán entre sí como las semi sumas de sus lados paralelos; es decir, que se tendrá

$$\frac{MPP'M'}{NQQ'N'}=\frac{MS+PT}{NS+QT}.$$

Pero (748)

$$\frac{MS}{NS}=\frac{PT}{QT}=\frac{b}{a}, \text{ de donde } \frac{MS+PT}{NS+QT}=\frac{b}{a};$$

luego

$$\frac{MPP'M'}{NQQ'N'}=\frac{b}{a}.$$

Así, que los elementos correspondientes de la elipse y del círculo están entre sí en la relacion $\frac{b}{a}$; por lo tanto, sus áreas totales guardarán tambien la misma relacion, y se tendrá

$$\frac{A}{\text{círc.}^{\circ}\,OA} \text{ ó } \frac{A}{\pi . a^2}=\frac{b}{a},$$

de donde se obtiene

$$A=\pi . ab.$$

* 753. Escolio. *El área de la elipse es media proporcional entre las de los círculos descriptos sobre los dos ejes como diámetros.* En efecto, se tiene la proporcion idéntica

$$\frac{\pi . a^2}{\pi . ab}=\frac{\pi . ab}{\pi . b^2}.$$

CAPÍTULO II.

DE LA PARÁBOLA.

754. *La* PARÁBOLA *es una curva plana que tiene todos sus puntos equidistantes de uno fijo y de una recta tambien fija. Aquel se llama* FOCUS *y esta* DIRECTRIZ.

Así, sean M, M′, M″,..... diferentes puntos de una parábola de la que F sea el focus y XY la directriz (fig. 301); se tendrá

$$FM=MP,\quad FM'=M'P',\quad FM''=M''P''.....$$

La recta que, como FM, une un punto cualquiera M de la parábola con el focus, se llama el *radio vector* de este punto.

Parámetro es la distancia FD del focus á la directriz.

De la definicion de la parábola se deduce la solucion del siguiente

PROBLEMA I.

755. *Describir una parábola conociendo el focus y la directriz.*

1.° *Construccion de la parábola por puntos.* Sean F el focus y XY la directriz (fig. 301). Bajo desde aquel la perpendicular indefinida FD sobre la XY: el punto A, medio de FD, equidista del focus y de la directriz, pertenece por lo mismo á la parábola, y es evidentemente el único de la perpendicular FD que goza de esta propiedad. Para construir otros puntos de la curva, tomo sobre FD uno cualquiera C, y levanto por este sobre FD la perpendicular indefinida MM′; despues, desde el focus F como centro, con DC por radio, describo dos arcos de círculo que corten á la perpendicular MM′ en dos puntos M y M′, y digo que estos pertenecen á la parábola. En efecto, si desde M, por ejemplo, bajo la perpendicular MP sobre la directriz, se tendrá MP = DC = MF; luego M equidista del focus y de la directriz. Tomando una segunda distancia DC′, se determinarian del mismo modo dos nuevos puntos M″, M‴, y así seguiriamos. No quedará mas que unir todos los así obtenidos por un trazo continuo que representará la parábola, con tanta mas exactitud cuanto mayor sea el número de estos puntos.

Para que los arcos de círculo descriptos desde el focus como centro, con DC por radio, puedan cortar á la perpendicular MM′, es necesario y suficiente que se tenga FC < DC; así es que la distancia DC deberá tomarse mayor que DA, y se le podrá hacer crecer á partir de DA mas allá de todo límite; donde se ve que la parábola se compone de dos ramas indefinidas AMM″..... y AM′M‴,..... que parten del punto A y se alejan indefinidamente del focus y de la directriz.

Para construir la parábola por puntos puede emplearse tambien el procedimiento siguiente: por un punto cualquiera P, tomado sobre la directriz, tiro á esta una perpendicular PQ (fig. 302); uno P con F, y en el medio I de PF levanto una perpendicular IM, cuya interseccion con PQ determinará un punto M de la parábola. En efecto, es claro que MP = MF (59). Esta construccion no da de cada vez mas que un solo punto de la curva; por lo que vemos que *toda perpendicular á la directriz corta á la parábola en un solo punto.*

2.° *Trazado de la parábola por un movimiento continuo.* Fijo en el focus F y en el vértice C de una escuadra ABC (fig. 303) las estremidades de un hilo cuya longitud sea igual al cateto mayor BC; despues hago resbalar el cateto menor AB á lo largo de una regla RS aplicada sobre la directriz, teniendo el hilo constantemente estendido sobre el BC por medio de una punta ó de un lápiz. El arco de curva engendrado por la punta es un arco de parábola. En efecto, en cualquiera posicion M de aquella, siendo la longitud (FM+MC) del hilo igual por hipótesis al lado BC=BM+MC, resulta FM=BM, esto es, que el punto M equidista del focus y de la directriz.

Teniendo la parábola dos ramas infinitas, es claro que no se podrá describir mas que un arco muy pequeño en las inmediaciones del focus. Trazada ya la rama superior, bastará volver la escuadra y seguir el mismo procedimiento para construir la inferior.

756. Hemos visto (726) que la circunferencia de círculo puede considerarse como una elipse en que la distancia entre los focus se ha hecho cero. Si suponemos, por el contrario, que uno de los focus y el vértice adyacente de una elipse quedan fijos, y el otro se aleja indefinidamente, se ve con facilidad que en el límite la elipse se convertirá en una parábola. Sean, en efecto, A, F (fig. 304) el vértice y focus que se han supuesto fijos, y describamos el círculo director F′D, que tiene por centro al otro focus F′. Supongamos ahora que el F′ se aleje cada vez mas de F: en cada posicion de F′ se tendrá MP=MF (742). Lo mismo se verificará tambien en el límite cuando el focus F′ se haya alejado infinitamente; mas entonces la línea F′MP se habrá convertido en la paralela P′M′Q′, tirada á DF por el punto M′ de la curva límite de la elipse, y el círculo director F′D se confundirá con la perpendicular XY levantada en el punto D á DF, y una vez que se tendrá entonces M′P′=M′F, el punto M′ pertenecerá á una parábola, que tenga XY por directriz y F por focus.

Así, *la parábola es el límite al cual tiende una elipse, de la que uno de sus focus se aleja indefinidamente del otro, que hemos supuesto fijo, lo mismo que su vértice adyacente.* Se podrá entonces, considerada la parábola bajo este punto de vista, deducir sus propiedades de las de la elipse.

TEOREMA I.

757. *La parábola tiene por eje de simetría la perpendicular bajada desde el focus á la directriz.*

Esta propiedad resulta evidentemente de la construccion del número 755, 1.°; es claro, en efecto, que los dos puntos M, M′ (fig. 301) son simétricos respecto á la recta FD, porque divide en dos partes iguales á la cuerda MM′ (82). Tambien es esto consecuencia de los números 727 y 756.

758. La perpendicular bajada desde el focus á la directriz ha recibido el nombre de *eje* de la parábola. Se llama *vértice* el punto A en que este corta á la curva.

759. Se designa ordinariamente por p el parámetro de la parábola, y entonces

$$p = \mathrm{FD} = 2\mathrm{AF}.$$

Llamando a, b, c los ejes y la escentricidad de la elipse AFF′ (figura 304), se tendrá (730)

$$[1] \qquad a = c + \frac{p}{2},$$

$$[2] \qquad b^2 = a^2 - c^2 = p\left(c + \frac{p}{4}\right).$$

Si tenemos una propiedad de la elipse espresada en funcion de a, b, c, bastará reemplazar a y b por sus valores [1] y [2], y suponer en seguida $c = \infty$, para deducir la correspondiente de la parábola.

760. Hemos definido esta como una curva cuyos puntos equidistan todos de uno fijo y de una recta fija. Nos falta demostrar que los puntos de la parábola son los únicos que gozan de esta propiedad. Si se consideran, en efecto, otros dos K y K′ (fig. 305), uno esterior y otro interior á la parábola, y situados sobre una misma paralela tirada al eje por el punto M, se tendrá evidentemente.

$$\mathrm{KP} < \mathrm{MP} = \mathrm{MF}, \quad \mathrm{K'P} > \mathrm{MP} = \mathrm{MF};$$

de donde se deduce el siguiente

TEOREMA II.

Un punto tomado sobre el plano de una parábola está mas ó menos distante del focus que de la directriz, segun sea esterior ó interior á la curva.

El teorema recíproco de este es verdadero, y da el medio de reconocer si un punto dado sobre el plano de una parábola que no está trazada, y solamente determinada por su focus y directriz, es interior ó esterior á esta curva.

TEOREMA III.

761. *La tangente* TMT′ *á la parábola forma ángulos iguales* T′MF, TMQ *con el radio vector* FM *del punto de contacto, y con la paralela* MP *tirada por este punto al eje* (fig. 306).

Es claro, en efecto, que cuando uno de los focus F′ (fig. 304) de una elipse se aleja indefinidamente (756), el radio vector MF′ que une este focus con el punto de contacto de una tangente, tiende á quedar paralelo al eje mayor, mas en cada una de las posiciones del focus F′ subsistirá el teorema del n.° 734, y será verdadero aun en el límite, cuando la elipse se haya convertido en parábola y el radio vector MF′ en la paralela M′Q′ al eje.

Puede tambien demostrarse directamente este teorema de la manera que sigue:

Tiremos por el punto M una secante cualquiera MM′ (fig. 306), que corte á la directriz XY en el punto C′, y unamos F con C′. Los dos triángulos rectángulos semejantes M′P′C′, MPC′ dan la relacion

$$\frac{MC'}{M'C'}=\frac{MP}{M'P'} \quad ó \quad \frac{MF}{M'F};$$

por consiguiente, la recta FC′ divide en dos partes iguales al ángulo MFR′ (248). Ahora, hagamos girar la secante MM′ alrededor del punto M, de manera que el M′ se le aproxime indefinidamente; el ángulo MFR′ tiende hácia dos rectos, y por lo tanto, el MFC′ hácia uno; luego en el límite, cuando los dos puntos M y M′ coincidan, esto es, cuando la secante MM′ se haya convertido en la tangente TMT′ (514), la recta FC, que une el focus con el punto C de interseccion de la tangente con la directriz, será perpendicular al radio vector FM que corresponde al punto de contacto. Se tendrá entonces los dos triángulos rectángulos CMF, CMP, que serán iguales, como que tienen la hipotenusa MC comun y un cateto igual FM=MP; luego

el ángulo T′MF = al T′MP = TMQ (50),

que es lo que necesitábamos demostrar ([1]).

762. Corolario I. *La bisectriz* MN *del ángulo* FMQ *formado en un punto* M *de la parábola por el radio vector* FM *y la paralela* MQ *al eje, es la* NORMAL *en este punto* (fig. 306). Porque se tiene

ángulo T′MF = ángulo TMQ; ángulo FMN = ángulo QMN;

de cuyas igualdades, sumando miembro á miembro, se obtiene

ángulo T′MN = al TMN;

luego MN es perpendicular á la tangente TMT′.

763. Corolario II. *El punto de contacto* M *de una tangente* TMT′ (figura 306) *y el de interseccion* I *de esta tangente con el eje de la parábola, equidistan del focus.*

En efecto, el ángulo T′MF = al TMQ = al TIF (70, 3.°); luego el triángulo MIF es isósceles, y FM = FI.

764. Corolario III. *La tangente á la parábola en su vértice es perpendicular al eje.*

765. Si por el punto de contacto M (fig. 308) de una tangente TMT′ á la parábola tiro una paralela MQ al eje, y junto el focus con el punto P en que corta á la directriz XY, el triángulo MPF será isósceles, porque FM = MP; además, la tangente TMT′ divide en dos partes iguales al ángulo del vértice PMF (761); luego los dos triángulos PMK, FMK son iguales, y la tangente TMT′ perpendicular en el punto K medio de PF.

([1]) Puede decirse tambien: sea la tangente TMT′ (fig. 307), que se puede considerar como la prolongacion del *elemento* MM′ de la parábola. Bajo desde el punto M′ la perpendicular M′I á MP, y rebato FM′ en FK sobre FM, y se tendrá

FM = MP, FM′ = M′P′,

de donde se saca

FM − FM′ = MP − M′P′,

ó

MK = MI.

Pero se puede sustituir al arco infinitamente pequeño M′K su tangente en el punto K, y se tendrá así dos triángulos rectángulos MM′I, MM′K, que serán iguales, por tener la hipotenusa comun MM′ y un cateto igual MI = MK; luego

el ángulo T′MF = al T′MP = al TMQ.

Sea ahora S un punto cualquiera tomado en la tangente TMT'; tiro SF, SP y la paralela SV al eje. Se tendrá evidentemente (59 y 53)

$$SF = SP > SV;$$

luego *todos los puntos de la tangente á la parábola que no sean el de contacto, son esteriores á esta curva.*

Teorema IV.

766. *El lugar geométrico de las proyecciones del focus de una parábola sobre sus tangentes es la tangente en el vértice.*

En efecto, la proyeccion K (fig. 308) del focus F sobre la tangente TMT' es el medio de FP (765); el vértice A de la parábola es, por otra parte, el medio de FD; la recta AK será entonces paralela á la directriz XY (246), ó perpendicular al eje, es decir, que el punto K se halla en la tangente al vértice de la parábola (764).

Este teorema es una consecuencia evidente de los n.os 739 y 756.

767. Escolio. Así, *cuando un ángulo recto se mueve de modo que su vértice describa una línea recta, y que uno de sus lados pase siempre por un punto fijo, el otro toca constantemente en una parábola que tiene por focus el punto fijo, y por parámetro el doble de la distancia de este punto á la recta dada.*

768. Se llama *sub-tangente* la proyeccion HI (fig. 309), sobre el eje de la parábola, de la parte MI de tangente comprendida entre el eje y el punto de contacto.

El vértice de la parábola divide á la sub-tangente en dos partes iguales. En efecto, hemos visto (765) que PF era perpendicular á MI; además, FM = FI (763); luego MK = KI, y como AK es paralela á MH, se deduce que el punto A es el medio de HI (244).

769. Se llama *sub-normal* la proyeccion HN (fig. 309), sobre el eje de la parábola, de la parte MN de normal comprendida entre el eje y el punto de contacto.

La sub-normal es igual á la mitad del parámetro. En efecto, hemos visto (768) que MI = 2KI; luego MN = 2KF, y por lo tanto, HN = 2AF = FD.

Teorema V.

770. *El cuadrado de una cuerda MM' perpendicular al eje de la parábola es proporcional á la distancia AH de esta cuerda al vértice* (figura 309).

En efecto, el triángulo rectángulo MIN da (260, 2.°).

$$\overline{MH}^2 = HI.HN.$$

Pero $$HI = 2.AH \ (768), \quad HN = p \ (769);$$

luego $$\overline{MH}^2 = 2p.AH.$$

Mas $$\overline{MM'}^2 = 4\overline{MH}^2;$$

luego, en fin, $$\overline{MM'}^2 = 8pAH.$$

En donde vemos que la relacion $\frac{\overline{MM'}^2}{AH}$ es constante é igual á *ocho veces* la del parámetro con la unidad.

COROLARIO. Si se considera al punto G proyectado en el focus F de la parábola, se tendrá

$$4\overline{GF}^2 = 8p.AF = 8p.\tfrac{1}{2}p = 4p^2;$$

de donde

$$GF = p = 2AF;$$

esto es, que *la longitud de la semi-cuerda tirada por el focus perpendicularmente al eje de la parábola es doble de su distancia al vértice.*

PROBLEMA II.

771. *Tirar una tangente á la parábola: 1.° por un punto tomado sobre esta curva; 2.° por uno esterior; 3.° que sea paralela á una recta dada.*

1.° Sea M el punto dado en la curva (fig. 306). Tiro el radio vector FM, y por el punto M la paralela PQ al eje; bastará evidentemente dividir el ángulo FMP en dos partes iguales, y la bisectriz TMT′ de este ángulo será la tangente pedida (761).

Aun es mas sencillo tomar sobre el eje, y á partir del focus F por el lado de la directriz, una longitud FI = FM; porque uniendo I con M, se tendrá la tangente pedida (763).

2.° Sea S un punto esterior á la parábola (fig. 310). Desde él, como centro, con la distancia SF al focus por radio, describo una circunferencia que corte á la directriz XY en dos puntos P, P′; tiro FP, FP′, y bajando desde S á FP y FP′ las dos perpendiculares ST y ST′, se tendrán las dos tangentes pedidas; en cuanto á los puntos de contacto M y M′, quedarán determinados por la interseccion de las paralelas al eje PQ, P′Q′ con ST y ST′. En efecto, siendo la recta ST, por ejemplo, perpendicular en el medio de la cuerda FP, los dos triángulos rectángulos FMI, PMI son iguales; luego el ángulo FMI = al PMI = al TMQ, y la recta ST será tangente en el punto M á la parábola (761).

Corolario. Se demostrará fácilmente, sea como consecuencia del corolario del n.° 744, 2.°, y del n.° 756, ó directamente, que: 1.° *las dos tangentes* ST, ST′ *tiradas á la parábola por un punto esterior* S *forman ángulos iguales* TSV, T′SF *con la recta que une este punto al focus y la paralela al eje tirada por el mismo punto; 2.° la recta* FS, *que une este punto con el focus, divide en dos partes iguales el ángulo* MFM′ *de los radios vectores tirados desde el focus á los puntos de tangencia.*

3.° Sea ZU la direccion de la recta á que debe ser paralela la tangente pedida (fig. 311). Bajo desde el focus á ZU una perpendicular que corte á la directriz en el punto P; la perpendicular IT levantada en el medio de FP será la tangente que se busca, y el punto de contacto M quedará determinado por la interseccion de IT con la paralela PQ tirada al eje por el punto P.

Es evidente que este problema no admite mas que una solucion.

772. Obsérvese que las construcciones precedentes suponen tan solo que la parábola está determinada por su directriz y su focus, y que no se necesita que se halle trazada.

Si lo estuviese, se determinaria su focus del modo siguiente: *Tírense dos cuerdas paralelas cualesquiera, y habiendo unido sus medios por una recta indefinida, trácese una cuerda perpendicular á esta recta, y levantando otra perpendicular en el medio de esta cuerda, se tendrá el eje de la parábola, y no quedará mas que tomar un punto cualquiera en él, levantar en el mismo una perpendicular igual al doble de su distancia al vértice, unir este con la estremidad de esta perpendicular, y proyectando sobre el eje el punto en que la recta de union corte á la parábola, se tendrá el focus* (770, corolario).

Teorema VI.

773. *El lugar geométrico de los vértices de todos los ángulos rectos circunscriptos á la parábola es la directriz.*

Sean las dos tangentes rectangulares ST, ST′ (fig. 312), que tocan en M y M′ á la parábola. Tiremos por los puntos S y M las rectas

SD y SV, MV y MP perpendiculares y paralelas al eje, y las FS, FM, FM', y se tendrá

$$\text{ángulo FMS} = \text{ángulo PMS (761)} = \text{ángulo MSV (70, 1.°)}$$

$$= \text{al M'SF (771, 2.°, corolario)};$$

además

$$\text{ángulo VMP} = 90^\circ = \text{al MSM'};$$

luego

$$\text{ángulo VMP} - \text{ángulos (FMS y PMS)} = \text{al MSM'} - \text{los (MSV y M'SF)},$$

ó

$$\text{ángulo VMH} = \text{al FSH}.$$

Los dos triángulos VMH, FSH tienen, pues, dos ángulos iguales; luego el SFH=MVH = 90°. Pero los triángulos rectángulos FMS, PMS tienen la hipotenusa comun SM y un ángulo igual FMS=PMS; luego son iguales, FM=PM, y por consiguiente, el punto P pertenece á la directriz, y el vértice S se hallará situado sobre esta recta, que es lo que necesitábamos demostrar.

774. Puesto que el ángulo SFH=90°, lo mismo valdrá el SFM' (771, 2.°, corol.), y los tres puntos M, F, M' estarán situados en línea recta. Así: 1.° *la recta que une los puntos de contacto de los lados de un ángulo recto circunscripto á la parábola pasa por el focus; 2.° es perpendicular á la que une el focus con el vértice del ángulo.*

Teorema VII.

775. *El área de un segmento parabólico* AMK (fig. 313) *es igual á los dos tercios de la de un rectángulo* AHMK *de la misma base* AK *y altura* MK.

Consideremos un elemento mm' de la parábola, y bajemos sobre el eje las perpendiculares mk, $m'k'$. Tiremos las tangentes mt, $m't'$, y se tendrá (768)

$$At = Ak, \quad At' = Ak',$$

de donde

$$At' - At \text{ ó } tt' = Ak' - Ak \text{ ó } kk'.$$

Luego el área del pequeño trapecio $mm'k'k$ es doble de la del triángulo $m't't$. Pero se puede descomponer el segmento parabólico AMK en una infinidad de trapecios pequeños, de los que cada uno será el doble del triángulo correspondiente, y es claro que la suma de todos estos pequeños triángulos compondrá la figura TMA; además, TK = 2AK (768); luego

$$\text{segmento AMK} = 2 \text{ figura TMA} = \tfrac{2}{3} \text{ triángulo TMK} = \tfrac{2}{3} \text{AK}.\text{MK}.$$

CAPÍTULO III.

DE LA HÉLICE.

776. Consideremos un cilindro recto ABCD (fig. 314) de base circular. Si concebimos cortada su superficie á lo largo de una de las generatrices, y estendida sobre un plano, tendrá por desarrollo, como hemos visto (549), un rectángulo ADD′A′ cuya altura AD será la misma del cilindro, y sus bases AA′, DD′ iguales en longitud á los perímetros de las bases del mismo.

Dividamos la altura del rectángulo y el lado opuesto A′D′ en un cierto número de partes iguales AE, EF,... A′R, RS..., y tiremos las rectas AR, ES,..., que serán evidentemente paralelas. Si se arrolla el rectángulo ADD′A′ al cilindro ABCD, la recta AR vendrá á aplicarse sobre la superficie convexa de este, siguiendo un arco de curva que partirá del punto A y terminará en E; la recta ES determinará igualmente otro arco que tendrá su orígen en E y terminará en F, y así sucesivamente. La curva obtenida de este modo se llama *hélice.*

Espiral es cada uno de los arcos AMM′M″E, ENN′N″F... de la hélice que tienen sus estremidades sobre la misma generatriz AD de la superficie cilíndrica, y dan la vuelta entera al cilindro; cada espiral resulta del arrollamiento de una de las rectas AR, ES...

La parte constante AE de generatriz comprendida entre las estremidades de una espiral, se llama el *paso de la hélice.*

777. Así, la longitud de la circunferencia de la base del cilindro, la de una espiral de la hélice trazada sobre su superficie, y el paso de esta hélice son los tres lados del triángulo rectángulo AA′R, cuyo arrollamiento sobre el cilindro ha dado la espiral AMM′M″E. La hélice quedará, pues, completamente determinada, cuando se conozcan dos de los elementos de este triángulo.

TEOREMA I.

778. *Por dos puntos dados en la superficie de un cilindro, no se puede hacer pasar mas que un arco de hélice; y este es la línea mas corta que se puede trazar sobre el cilindro entre aquellos dos puntos.*

En efecto: 1.° los dos puntos dados no determinan mas que una línea recta sobre el desarrollo de la superficie del cilindro; 2.° si se compara con el arco de hélice que los une cualquiera otra curva comprendida entre ellos, esta no será rectilínea cuando se haya desarrollado el cilindro; luego será mas larga que el arco de hélice, que se habrá estendido en línea recta.

TEOREMA II.

779. *La distancia* MP *desde un punto* M *de la hélice á la base del cilindro es proporcional: 1.° al arco* AM *de esta curva comprendido entre la base del cilindro y el punto* M; *2.° á la proyeccion* AP *de este arco sobre la base* (fig. 314).

Desarrollemos, en efecto, el cilindro sobre el rectángulo ADD′A′. La espiral AMM′M″E se desarrollará segun la recta AR; y los puntos M, M′, M″ caerán en m, m', m'', de suerte que se tendrá:

$$\begin{aligned}
Am &= AM;\ Am' = AM';\ldots\ AR = AMM'M''E,\\
Ap &= AP;\ Ap' = AP';\ldots\ AA' = APP'BA,\\
mp &= MP;\ m'p' = M'P';\ldots\ A'R = AE.
\end{aligned}$$

Pero, se tiene

$$\frac{mp}{Am} = \frac{m'p'}{Am'} = \ldots = \frac{A'R}{AR},$$

$$\frac{mp}{Ap} = \frac{m'p'}{Ap'} = \ldots = \frac{A'R}{AA'},$$

y por lo tanto,

$$\frac{MP}{AM} = \frac{M'P'}{AM'} = \ldots = \frac{AE}{AMM'M''E},$$

$$\frac{MP}{AP} = \frac{M'P'}{AP'} = \ldots = \frac{AE}{APP'BA};$$

que es lo que se necesitaba demostrar.

780. Designando por l la longitud de una espiral, por h el paso de la hélice, y por R el radio de la base del cilindro, tendrémos:

$$MP = \frac{h}{l} \cdot AM,$$

y

$$MP = \frac{h}{2\pi R} \cdot AP.$$

Teorema III.

781. *La tangente á la hélice forma en cada punto* M *un ángulo constante con la generatriz* PML *del cilindro* (fig. 315).

Desarrollemos el cilindro sobre el plano que le es tangente á lo largo de la generatriz PML (548): esta línea quedará inmóvil, y la base del cilindro se convertirá en una recta $A'PB'p''$ perpendicular á PL, mientras que las porciones de las otras generatrices conservarán sus mismas longitudes y paralelismo. Si ahora se lleva sobre la *transformada* $A'PB'p''$ de la base del cilindro las distancias

$$PA' = PA,\ PB' = PB,\ Pp'' = PBP'', \ldots$$

y se levanta las perpendiculares

$$B'n' = BN',\ p''m'' = P''M'', \ldots$$

los puntos A', M, n', m''..., darán la *transformada* de la hélice sobre el desarrollo del cilindro, y es claro que esta transformada será una recta $A'Mn'm''$, pues que se tiene

$$\frac{MP}{A'P} = \frac{n'B'}{A'B'} = \frac{m''p''}{A'p''} = \ldots \text{ (779).}$$

Supuesto esto, digo que la recta $A'Mn'm''$ es precisamente la tangente en el punto M de la hélice primitiva $AMNM''$. En efecto, esta recta se halla situada en el plano tangente del cilindro que contiene un elemento superficial (517) $LPpl$ de la superficie cilíndrica; y, como este elemento ha quedado inmóvil durante el desarrollo de la superficie, resulta que el elemento lineal Mm es comun á la curva $AMNM''$ y á la recta $A'Mn'm''$; luego estas dos líneas son tangentes una á otra (514).

Si se considera otro punto cualquiera M' de la hélice, y se desarrolla el cilindro sobre el plano que le toca por la generatriz $P'M'$, se verá tambien que tomando $P'A''=P'PA$, y uniendo A'' con M', la recta $A''M'm'''$ será precisamente la tangente al punto M' de la primitiva hélice $AMN'M''$. Pero los dos triángulos rectángulos MPA', $M'P'A''$ son semejantes, pues que $\frac{MP}{A'P \text{ ó } AP}=\frac{M'P'}{A''P' \text{ ó } APP'}$ (779); luego son equiángulos; por lo que:

$$\text{ángulo } A'MP = \text{ángulo } A''M'P',$$

que es lo que se necesitaba demostrar.

782. Si convenimos en contar los arcos de hélice desde el punto A en que esta curva encuentra la base del cilindro, y llamar *sub-tangente* á la proyeccion A'P de la tangente A'M sobre esta base, será *la sub-tangente* A'P *de un punto cualquiera* M *de la hélice igual á la proyeccion* AP *del arco* AM *sobre la base del cilindro*. Además, observemos que *la tangente* A'M *tiene la misma longitud que el arco de hélice* AM, pues que la una es la transformada del otro (781).

Problema I.

783. *Tirar una tangente á la hélice por un punto tomado sobre esta curva.*

Bastará evidentemente construir en el plano tangente del cilindro, al punto dado M (fig. 315), un triángulo rectángulo MPA', que tenga por altura la parte de generatriz MP comprendida entre el punto M y la base del cilindro, y por base una longitud A'P igual al arco AP de la base rectificado; la hipotenusa A'M de este triángulo será la tangente pedida.

Problema II.

784. *Construir la proyeccion de la hélice y de la tangente sobre un plano perpendicular á la base del cilindro.*

Se encontrará la solucion al fin de las *Nociones elementales de geometría descriptiva.*

NOTAS SOBRE LA GEOMETRÍA
Y ADICIONES.

APÉNDICE AL LIBRO III.

§ I.— Teoría de las transversales.

TEOREMA I.

785. *Toda transversal* MN *determina sobre los lados de un triángulo* ABC (fig. 316) *seis segmentos tales, que el producto* A′B.CB′.AC′ *de tres no consecutivos es igual al* A′C.B′A.C′B *de los otros tres.*

Tiremos por el vértice A la paralela AI á la transversal MN, y la propiedad del n.° 244, aplicada sucesivamente á los triángulos BC′A′ y CAI, nos dará las proporciones

$$\frac{C'A}{C'B}=\frac{A'I}{A'B},$$

$$\frac{CB'}{B'A}=\frac{A'C}{A'I}.$$

Multiplicando por órden estas dos proporciones, y haciendo desaparecer los denominadores, se tendrá

$$A'B.CB'.C'A=A'C.B'A.C'B,$$

que es lo que se necesitaba demostrar.

TEOREMA II.

786. Recíprocamente, *tres puntos* A′, B′, C′, *situados sobre los lados de un triángulo* ABC, *ó sobre sus prolongaciones, se hallarán en línea recta cuando determinen sobre estos lados seis segmentos ta-*

les, que el producto $A'B.CB'.AC'$ *de tres no consecutivos sea igual al* $A'C.B'A.C'B$ *de los otros tres, con tal que los tres puntos ó uno solo de ellos se hallen sobre las prolongaciones de los lados del triángulo.*

Tiremos, en efecto, por el vértice A la paralela AI á la recta A'C' que une dos de los tres puntos A', B', C'. Se tendrá (244)

$$\frac{C'A}{C'B}=\frac{A'I}{A'B}.$$

de donde

$$C'A.A'B=A'I.C'B. \qquad [1]$$

Pero tenemos por hipótesis :

$$A'B.C'B.C'A=A'C.B'A.C'B; \qquad [2]$$

dividiendo miembro á miembro la igualdad [2] por la [1], quedará

$$CB'=\frac{A'C.B'A}{A'I},$$

ó

$$\frac{CB'}{B'A}=\frac{A'C}{A'I};$$

es decir, que la recta A'B' divide á los dos lados AC é IC del triángulo AIC en partes proporcionales; luego es paralela á AI (246), y por lo tanto, coincide con A'C' (65); los tres puntos A', B', C' se hallan, pues, en línea recta.

Teorema III.

787. *Tres rectas* OA, OB, OC (fig. 317), *tiradas desde un mismo punto* O *á los vértices de un triángulo* ABC, *determinan sobre sus lados ó prolongaciones seis segmentos tales, que el producto* $C'A.BA'.CB'$ *de tres no consecutivos es igual al* $C'B.A'C.B'A$ *de los otros tres.*

Consideremos, en efecto, el triángulo ABA' y la transversal CC', tendrémos, en virtud del n.° 785,

$$CB.C'A.OA'=CA'.BC'.AO.$$

Las intersecciones de los lados del triángulo ACA' con la transversal BB' darán igualmente

$$B'C.BA'.OA=AB'.BC.A'O.$$

Multiplicando ordenadamente estas dos igualdades, y suprimiendo los factores comunes, quedará

$$AC'.BA'.CB'=C'B.A'C.B'A;$$

que es lo que queriamos demostrar.

TEOREMA IV.

788. Recíprocamente, *tres rectas tiradas desde los tres vértices de un triángulo* ABC, *concurren en un mismo punto cuando determinan, sobre sus lados ó prolongaciones, seis segmentos tales, que el producto* AC'.BA'.CB' *de tres no consecutivos es igual al* C'B.A'C.B'A *de los otros tres, con tal que las tres rectas ó una sola de ellas corten á los lados.*

Esta recíproca se demostrará fácilmente.

789. COROLARIO I. *Las perpendiculares bajadas desde los tres vértices de un triángulo sobre los lados opuestos se cruzan en un mismo punto.* En efecto, los triángulos ABA' y CBC', ACA' y BCB', CAC' y BAB' (fig. 318) son equiángulos, y tienen, por lo tanto, sus lados homólogos proporcionales; tendrémos así:

$$\frac{BA'}{BC'}=\frac{AB}{BC},$$

$$\frac{CB'}{CA'}=\frac{BC}{AC},$$

$$\frac{AC'}{AB'}=\frac{AC}{AB}.$$

Multiplicando por órden estas tres proporciones, quedará:

$$\frac{BA'.CB'.AC'}{BC'.CA'.AB'}=1,$$

y por consiguiente,

$$BA'.CB'.AC'=BC'.CA'.AB';$$

luego las tres perpendiculares AA', BB' y CC' concurren (788).

790. COROLARIO II. *Las rectas que unen los vértices de un triángulo con los medios de los lados opuestos concurren en un mismo punto. Este, que se llama él* CENTRO DE GRAVEDAD, *se halla situado á la ter-*

cera parte de cada una de estas rectas á contar desde los lados. Es evidente que (fig. 319)

$$BA'.CB'.AC'=A'C.B'A.C'B;$$

por lo que las tres *medianas* se cruzan en un mismo punto.

Tiremos ahora A'B', esta recta será paralela á AB (226), de modo que los triángulos CAB y CA'B' serán equiángulos; sus lados homólogos, por lo tanto, proporcionales; pero CA' es la mitad de CB; luego A'B' lo es de AB. Mas los triángulos GAB y GA'B', por ser tambien equiángulos, tienen sus lados homólogos proporcionales, y como A'B' es la mitad de AB, GA' será la mitad de GA ó la tercera parte de AA'.

791. Escolio. *El centro de gravedad* G *de un triángulo, el centro* O *del círculo circunscripto, y el punto de concurso* P *de las perpendiculares bajadas desde sus vértices sobre los lados opuestos, son tres puntos situados en línea recta, y la distancia del primero al segundo es la mitad de la suya al tercero.* En efecto, siendo las distancias GA' y GC', mitades respectivas de GA y GC, si se prolonga GP una cantidad GO igual á la mitad de GP, las rectas A'O y C'O serán paralelas á AP y CP (71, 1.°); porque los triángulos AGP y OGA', GPC y GOC' son semejantes (282), y por esto los ángulos A y A', C y C' iguales. Luego A'O y C'O son las perpendiculares levantadas sobre los puntos medios de los lados BC y AB, y O es, por consiguiente, el centro del círculo circunscripto al triángulo ABC.

792. *Se llaman* PUNTOS ARMÓNICOS *cuatro puntos situados en línea recta, de manera que las distancias del segundo al primero y al tercero son proporcionales á las del cuarto á estos mismos, ó que el producto de la distancia de los dos puntos estremos por la de los dos medios es igual al producto de las de estos á los otros dos.*

Si se tiene (fig. 320)

$$\frac{BA}{BC}=\frac{DA}{DC}$$

ó

$$DA.BC=BA.DC,$$

dirémos que los cuatro puntos A, B, C, D forman un *sistema armónico*. Los que ocupan el lugar par ó el impar se llaman *puntos conjugados*.

De las proporciones [1] y [2] del n.° 248 se saca (fig. 108)

$$\frac{I'B}{I'C}=\frac{IB}{IC};$$

por lo que los cuatro puntos I', I, B, C forman un sistema armónico; I é I', B y C son conjugados.

793. *Se llama* HAZ ARMÓNICO *al sistema de cuatro rectas que, tiradas desde un mismo punto, pasan por cuatro armónicos.* Las que pasan por los puntos conjugados se llaman *armónicas conjugadas.* Así, en la fig. 108, las rectas AI', AB, AI y AC forman un haz armónico; AI y AI', AB y AC son las armónicas conjugadas. Vemos, por lo tanto, que *los dos lados de un ángulo y las bisectrices de él y de su suplemento forman un haz armónico.*

Teorema V.

794. *Cuatro rectas tiradas desde un mismo punto* O *forman un haz armónico, cuando una paralela* EF *á una de ellas* OA *se halla cortada por las otras tres en partes iguales* (fig. 321).

Tiremos, en efecto, una transversal cualquiera AD: digo que los cuatro puntos A, B, C, D, en que encuentra las rectas propuestas, son armónicos. Para demostrarlo, tiro por el punto C una paralela IK á EF, la que quedará cortada en este punto en dos partes iguales (252). Se formarán así los triángulos equiángulos DOA y DKC, BCI y BOA, que darán las proporciones

$$\frac{DA}{DC}=\frac{OA}{CK}, \qquad \frac{BA}{BC}=\frac{OA}{CI \text{ ó } CK};$$

luego, á causa de la razon comun $\frac{OA}{CK}$, tendrémos

$$\frac{BA}{BC}=\frac{DA}{DC}.$$

Teorema VI.

795. Recíprocamente, *si cuatro rectas tiradas desde un mismo punto forman un haz armónico, toda paralela á una de ellas quedará cortada en partes iguales por las otras tres.*

Esta recíproca se demostrará fácilmente imitando la demostracion de la directa.

796. ESCOLIO. Siendo AD una recta cualquiera, la demostracion del n.° **794** prueba que *toda transversal se halla cortada armónicamente por un haz armónico.*

TEOREMA VII.

797. *Si desde un punto* O, *tomado sobre el plano de un ángulo* XAY (fig. 322), *se tira una série de transversales* OBC, OB′C′, OB″C″..., *que corten á los lados de este ángulo, las rectas que, como* BC′ *y* CB′, *unan los puntos de seccion opuestos de un mismo par de transversales, se cortarán en los* M, M′, M″... *cuyo lugar será la armónica conjugada de* OA *con respecto á los dos lados del ángulo* XAY.

Unamos, en efecto, el punto M con el A, y aplicando al triángulo ABC el teorema del n.° 787, tendrémos

$$B'B \,.\, IC \,.\, C'A = B'A \,.\, IB \,.\, C'C.$$

Si se considera OB′C′ como una transversal del mismo triángulo ABC, se tendrá tambien (785)

$$OB \,.\, B'A \,.\, C'C = OC \,.\, B'B \,.\, C'A;$$

multiplicando estas dos ecuaciones miembro á miembro, y suprimiendo los factores comunes, quedará

$$OB \,.\, IC = OC \,.\, IB,$$

lo que demuestra que los cuatro puntos O, C, I, B forman un sistema armónico; luego AM es la armónica conjugada de AO respecto á las dos rectas AX y AY. Por la misma razon, AM′ será tambien la armónica conjugada de AO respecto á estas mismas rectas, y como una línea tal no puede tener mas que una sola armónica conjugada con relacion á otras dos [1], nuestro teorema queda demostrado.

---

[1] Esto es evidente por sí mismo; sin embargo podria decirse: si OA tuviese una segunda armónica conjugada AI′, se deberia tener (796)

$$OB \,.\, I'C = OC \,.\, I'B;$$

y multiplicando esta ecuacion en cruz con la precedente, se tendria la

$$I'C \,.\, IB = IC \,.\, I'B,$$

evidentemente absurda

PROBLEMA I.

798. *Hallar la armónica conjugada de la recta* OB *con relacion á las dos* OA *y* OC.

1.ª *solucion.* Por un punto cualquiera E de OB (fig. 321) tiro una paralela EGF á OA, tomo GF = GE, y uniendo O con F tendré resuelto el problema (794).

2.ª *solucion.* Por un punto cualquiera M de OB (fig. 323), tiro las dos transversales AF y GC, uno A con C y G con F, trazando ahora una recta por su punto de concurso D y por el O, se tendrá la armónica conjugada de OB.

Esta construccion tiene, sobre la anterior, la ventaja de poderse efectuar con la regla solamente.

Tambien podria servir para encontrar el punto armónico conjugado de B, con relacion á los dos A y C. Para esto, será suficiente unir los A, B, C con uno arbitrario O, tirar en seguida por A una secante cualquiera AF, la que determinará el punto M; si se tira en seguida CM, prolongando GF, se tendrá el punto D.

TEOREMA VIII.

799. *En todo cuadrilátero* COMPLETO [1] BAEDFCB (fig. 324), *cada una de las tres diagonales* AC, BD *y* EF *queda dividida armónicamente por las otras dos.*

En efecto, resulta de la 2.ª solucion del anterior problema que BI es la armónica conjugada de BD con relacion á las rectas BA y BC; luego las diagonales EF y AC están cortadas en partes armónicas, la primera en los puntos E, H, F, I, y la segunda en los A, G, C, I (795). Lo mismo verémos que ID es la armónica conjugada de IB con relacion á las rectas IG é IH, y por lo tanto, los cuatro puntos B, G, D, H forman un sistema armónico.

§ II.—Teoría del polo y la polar.

LEMA.

800. *El lugar geométrico de los puntos armónicos conjugados de uno dado* O *con relacion á las estremidades de las cuerdas que dejan*

[1] Si se prolongan los lados opuestos de un cuadrilátero sencillo ABCD hasta su encuentro en E y en F, se dice que la recta EF es la tercera diagonal del cuadrilátero, y que este es completo.

en un círculo todas las secantes bajadas desde dicho punto, es una recta perpendicular al diámetro que pasa por el mismo (fig. 325 y 326).

Tiremos el diámetro OAB, y buscando el armónico conjugado P del O con relacion á los puntos A y B, tendrémos uno del lugar geométrico que se busca. Lo que se trata de demostrar es que, si por este punto se baja una perpendicular á AB, cortará en partes armónicas á cualquiera cuerda CD tirada desde el punto O. Para esto, observo que la circunferencia ABCD es el lugar de todos los puntos cuyas distancias á los O y P guardan la relacion

$$\frac{AO}{AP} \text{ ó } \frac{BO}{BP} \text{ (249)},$$

porque se tiene por construccion que

$$\frac{AO}{AP}=\frac{BO}{BP}$$

luego uniendo P con C y con D, se tendrá

$$\frac{CO}{CP}=\frac{DO}{DP}.$$

Pero esta proporcion prueba que OP es, en la fig. 325, la bisectriz del ángulo CPD′, y que por consiguiente RS, perpendicular á OP, divide al ángulo CPD en dos partes iguales; así como en la figura 326, OP es la bisectriz del ángulo CPD, y por consiguiente RS, perpendicular á OP, divide al ángulo CPD′ en dos partes tambien iguales; luego las cuatro rectas PO, PC, PR y PD forman un haz armónico (793), y la recta RS pasa por el punto que es el conjugado de O con relacion á los C y D (796).

Problema I.

801. *Suponiendo que por un punto fijo* O (fig. 327) *se hayan tirado cierto número de secantes á una circunferencia, se pide que se determine el lugar geométrico de los puntos de concurso de las rectas que unan los de encuentro de las secantes con la curva.*

Sean OAB y OA′B′ un par de secantes; se quiere determinar el lugar de los puntos M y M′ que resultan de unir A con B′, y B con A′, A con A′ y B con B′. Llamemos, para esto, N y N′ á los armónicos conjugados de O con relacion á los A y B y á los A′ y B′.

Únase M con O y con N, y formarémos un haz armónico MOANB que deberá cortar á OA'B' en partes armónicas (**796**); por consiguiente, MN irá á pasar por N'; luego M está situado en la recta indefinida que sea lugar de los puntos armónicos conjugados de O con relacion á la circunferencia propuesta; y como lo mismo se diria del M', se deduce que dicha recta es precisamente el lugar geométrico que se busca.

802. Este lugar se llama la *polar* del punto O; y recíprocamente, este punto se denomina *polo* de aquella recta. Bien pronto (**806** y **810**) manifestarémos el fundamento de estas denominaciones.

803. Segun estos nombres, podemos enunciar el lema (**800**) de la manera que sigue: *todas las cuerdas cuyas direcciones concurren en un mismo punto* O *situado en el plano de una circunferencia, quedan cortadas en partes armónicas por dicho punto y por su polar* RS, *que es perpendicular al diámetro* AB *tirado por este punto* (fig. 325 y 326).

Por esto se verifica la proporcion

$$\frac{AO}{AP}=\frac{BO}{BP},$$

de la cual se saca

$$\frac{BO+AO}{BO-AO}=\frac{BP+AP}{BP-AP};$$

pero llamando G al centro de la circunferencia, se verificará (figura 325) que $BO=2AG+AO$ y que $BP=2AG-AP$, y del mismo modo, en la fig. 326, se tendrá $BO=2AG-AO$ y $BP=2AG+AP$; por lo que de la proporcion anterior se obtendrá

$$\frac{AG+AO}{AG}=\frac{AG}{AG-AP} \text{ ó bien } \frac{OG}{AG}=\frac{AG}{PG} \text{ (fig. 325);}$$

y

$$\frac{AG}{AG-AO}=\frac{AG+AP}{AG} \text{ ó bien } \frac{AG}{OG}=\frac{PG}{AG} \text{ (fig. 326),}$$

por lo que se ve que *el producto de las distancias que hay desde el centro al polo y á la polar es igual al cuadrado del radio.*

804. Suponiendo que la secante OA'B' (fig. 327) gire alrededor del polo y se convierta en tangente, los puntos M y M' se reunirán con el de contacto R, de modo que la polar pasará por este punto. Luego *la polar de un punto que sea* ESTERIOR *á una circunferencia es la cuerda que une los de contacto de las dos tangentes tiradas por el* *mismo, y el polo de una secante es el punto de concurso de las tangentes levantadas en los de encuentro de esta con la circunferencia.*

805. De aquí se deduce que, *para tirar una tangente á un círculo por un punto esterior á él, no hay mas que buscar la polar de este punto y unirle con aquellos en que esta corte á la circunferencia;* construccion que puede hacerse (801) sin mas que una regla.

Teorema X.

806. *Si un punto se mueve á lo largo de una recta* RS, *su polar girará alrededor del polo* O *de aquella recta* (fig. 325 y 326).

Sea O' un punto cualquiera de RS, le uno con G, y bajo desde O la OP' perpendicular á GO'. Por la semejanza de los triángulos GO'P y GOP' se tiene la proporcion

$$\frac{GP}{GP'}=\frac{GO'}{GO},$$

de la que se saca

$$GP'.GO'=GP.GO=\overline{AG}^2 \ (803).$$

Así vemos que OP' es la polar del punto O', y que *las polares de todos los puntos de una recta concurren en el polo de la misma*, lo que demuestra el teorema.

807. Corolario I. *Para tener el polo de una recta, bastará construir las polares de dos de sus puntos, y el de interseccion de estas será el pedido.*

808. Corolario II. *Para tirar una tangente á un círculo por un punto tomado sobre su circunferencia, tírese por este una secante cualquiera, búsquese su polo, y júntese este con el punto dado* (fig. 328).

809. Corolario III. *Si varios ángulos circunscriptos á un círculo tienen sus vértices en línea recta, sus cuerdas de contacto irán á concurrir en el polo de esta recta;* porque, siendo estas cuerdas las polares de los vértices (804), concurren en el polo de la recta sobre que están situados (fig. 328).

Teorema XI.

810. *Si una recta gira alrededor de un punto fijo, su polo describirá la polar de aquel punto* (fig. 325 y 326).

Sea OP' una recta cualquiera, tirada por el polo O de la recta RS;

bajo desde el centro una perpendicular cualquiera sobre ella, la que prolongo hasta que encuentre en O′ á la dicha RS, y digo que O′ es el polo de OP′. En efecto, la semejanza de los triángulos OGP′ y O′GP da la proporcion

$$\frac{GP}{GP'}=\frac{GO'}{GO},$$

de donde

$$GP'.GO'=GP.GO=\overline{AG}^2;$$

luego O′ es el polo de OP′, y así *el polo de toda recta tirada por un punto dado se halla sobre la polar de este punto*, lo que demuestra el teorema.

811. Corolario I. *La recta que une los polos de otras dos es la polar de su punto de interseccion;* porque el polo de esta recta debe hallarse á la vez sobre los dos de que se trata.

812. Corolario II. *Si las cuerdas de contacto de cualquier número de ángulos circunscriptos á una circunferencia concurren en un mismo punto, los vértices de aquellos se hallarán sobre la polar de este punto;* porque estos vértices son los polos de las cuerdas (fig. 328).

813. Se deduce del n.º 811 que, *si dos polígonos del mismo número de lados, y trazados en el plano de una circunferencia, son tales que los vértices* A, B, C..... (fig. 329) *del uno sean los polos de los lados* a, b, c..... *del otro; los vértices* ab, bc..... [1] *del segundo serán* recíprocamente *polos de los lados* AB, BC..... *del primero;* y además, *el punto de concurso de dos lados, ó de dos diagonales de cada uno será el polo de la recta que una los vértices-polos de estos dos lados ó diagonales en el otro.* Así, por ejemplo, el punto *ad* de concurso de los dos lados *a* y *d* es el polo de la recta AD que une los vértices A y D, polos respectivos de *a* y *d*.

Por esta razon se llama á dos polígonos de esta clase polares-recíprocos uno de otro.

Teorema XII.

814. *En todo exágono inscripto en una circunferencia se hallan situados en línea recta los tres puntos de concurso de los lados opuestos.*

---

[1] Si dos rectas están designadas una por *m* y otra por *n*, su punto de interseccion puede estarlo por *mn*.

Prolongando suficientemente los lados alternados BC, DE y AF (figura 330), se formará el triángulo PQR, que puede considerarse como cortado sucesivamente por las direcciones de los otros lados del exágono AB, CD y EF, y así tendrémos las igualdades (785)

$$\begin{aligned} LP.BR.AQ &= LQ.BP.AR, \\ NQ.CR.DP &= NR.CP.DQ, \\ MR.EP.FQ &= MP.EQ.FR, \end{aligned}$$

de las que, multiplicadas miembro á miembro, y teniendo presente que (255)

$$BR.CR = FR.AR, \quad DP.EP = CP.BP,$$

$$AQ.FQ = DQ.EQ,$$

resultará $$LP.NQ.MR = LQ.NR.MP,$$

lo que, segun el teorema del n.° 786, demuestra que los tres puntos L, M y N se hallan en línea recta.

815. Escolio. La verdad de este teorema subsiste, cualquiera que sea la forma del exágono inscripto, y aun cuando sus lados se cruzasen entre sí de todas las maneras posibles.

Teorema XIII.

816. *En todo exágono circunscripto á una circunferencia se cruzan en un mismo punto las tres diagonales que unen los vértices respectivamente opuestos.*

Este teorema es una consecuencia directa del precedente y del principio n.° 813; porque, siendo los dos polígonos ABCDEF y *abcdef* (fig. 330) polares-recíprocos uno de otro, los puntos de concurso L, M y N de los lados AB y DE, BC y EF, CD y AF del primero, son los polos de las diagonales *be*, *cf* y *ad* que unen en el segundo los vértices-polos de estos pares de lados. Así es que, estando los tres puntos L, M y N en línea recta, las tres diagonales *be*, *cf* y *ad* se cruzarán en un mismo punto O, que será el polo de aquella recta (806).

Teorema XIV.

817. *Inscribiendo en una circunferencia un cuadrilátero cualquiera* ABCD (fig. 331) *y circunscribiendo otro* abcd *cuyos lados toquen á la*

curva en los vértices del primero, se verifica: 1.° los cuatro puntos de concurso L, M, N, P *de los lados opuestos de ambos cuadriláteros están en línea recta; 2.° las cuatro diagonales* AC, BD, ac, bd *se cruzarán en el polo de la recta* LMNP; 3.° *las diagonales del cuadrilátero circunscripto pasarán por los puntos* M *y* L *en que se cortan los lados opuestos del inscripto.*

Sea O el punto de interseccion de las dos diagonales AC y BD; su polar será la recta LM (801), y deberá contener los polos N y P de estas diagonales; luego los cuatro puntos L, M, N y P se hallan en línea recta.

Siendo polares-recíprocos los dos cuadriláteros, los puntos L y M son los polos de las diagonales *ac* y *bd*; y estando los cuatro puntos L, M, N, P colocados en línea recta, sus polares *ac*, *bd*, AC, BD se cruzarán en el polo de la misma.

En fin, OM es la polar de L (801), y *ac* tambien lo es; luego la *ac* pasará por el punto M. Por la misma razon, *bd* pasará por el L.

TEORÍA GENERAL DE LA SEMEJANZA.

§ I.—Figuras semejantes.

818. *Dos líneas son* SEMEJANTES *cuando se las puede colocar de manera que, tirando por un mismo punto rectas á todos los suyos, los* RADIOS VECTORES (así se llaman estas rectas), *cuyas direcciones coinciden, son proporcionales.*

Las figuras terminadas por estas líneas se llaman tambien semejantes.

Supongamos que se haya transportado la línea *abck* á A′B′C′K′ (figura 332), y que, tirando por un cierto punto O rectas cualesquiera OA, OB, OC..... que encuentren á la curva A′B′C′K′ en los puntos respectivos A′, B′, C′, K′,..... se tenga la série de razones iguales

$$\frac{\text{OA}}{\text{OA}'}=\frac{\text{OB}}{\text{OB}'}=\frac{\text{OC}}{\text{OC}'}=\text{etc.},$$

la línea y la figura *abck* serán semejantes á la línea y figura ABCK.

El orígen comun O de todos los radios vectores se llama el *centro de semejanza* de las dos líneas ó de las dos figuras ABCK y A′B′C′K′, y los radios vectores cuyas direcciones coinciden *homólogos*. Tales son OA y OA′.

819. Si volviendo á colocar la línea A′B′C′K′ en su posicion primitiva *abck*, el punto O cae en *o*, se dice que estos puntos son los *centros de semejanza* de ABCK y de *abck*.

Si los radios homólogos son paralelos y están dirigidos en el mismo sentido, las dos líneas son entonces semejantes, y se dice que están *colocadas semejantemente;* si no, solo se llamarán semejantes.

Es evidente que los radios vectores de una de las dos líneas forman entre sí los mismos ángulos que los homólogos de la otra, es decir, que aquellos á los cuales son los primeros proporcionales.

820. De aquí se sigue que, para construir una línea semejante á otra ABCK, se tirarán desde cualquier punto O radios vectores á los A, B, C, tanto mas próximos cuanta mayor exactitud se quiera; y despues, por otro punto tambien arbitrario O, se harán pasar rectas *oa*, *ob*, *oc*,..... de tal modo trazadas, que los ángulos formados por la primera con todas las demás sean respectivamente iguales á los que OA forma con OB, OC.....; y por último, tomando sobre estas rectas distancias *oa*, *ob*, *oc*..... proporcionales á las OA, OB, OC,..... y uniendo los puntos *a*, *b*, *c*..... por una línea seguida, quedará resuelto el problema.

Teorema I.

821. *Cuando dos líneas* ABCK *y* abck *son semejantes, cualquiera que sea el punto de su plano que se tome por centro de semejanza de la primera, siempre habrá para la segunda otro centro correspondiente.*

Siendo semejantes las dos líneas, puede colocarse la *abck* en la posicion A′B′C′K′, de tal manera que, tirando desde un cierto punto O rectas OA, OB, OC que corten en los respectivos puntos A′, B′, C′..... á la A′B′C′K′, se tenga

$$\frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'},\text{ etc.},$$

y entonces O será su centro de semejanza. Tomemos ahora sobre el plano de las dos líneas un punto arbitrario P, que unirémos con O, A, B.....; hagamos en seguida resbalar á la segunda línea, de modo que todos sus puntos describan rectas paralelas á OF, el A′ se habrá colocado en la PA, y digo que los B′, C′..... lo quedarán en los B″, C″..... en que las paralelas tiradas á OP por los puntos

B′, C′..... cortan á las respectivas rectas PB, PC..... Con efecto, tiremos A′I paralela á PA, unamos I con B′, y se tendrá (244)

$$\frac{OP}{OI}=\frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'};$$

luego IB′ es paralela á PB (246), y por consiguiente, B′B″=IP=A′A″; por una razon semejante, C′C″=A′A″, y así sucesivamente; por lo tanto, la línea A″B″C″K″ no es otra cosa que la A′B′C′K′ trasladada á una posicion paralela á la que tenia (236). Pero es evidente que las razones $\frac{PA}{PA''}=\frac{PB}{PB''}=\frac{PC}{PC''}$..... son respectivamente iguales á las $\frac{OA}{OA'}$, $\frac{OB}{OB'}$, $\frac{OC}{OC'}$....., y por consiguiente, iguales entre sí; luego el punto F es tambien un centro de semejanza de las dos líneas ABCK y A″B″C″K″ (818), y la razon de semejanza no ha variado.

822. Escolio. Observemos que podria tomarse el punto F sobre una de las dos líneas, ABCK por ejemplo. En este caso, el punto I perteneceria al perímetro de la segunda; porque divide á OF en la razon de OA á OA′, de suerte que, trasladando la línea A′B′C′K′ á A″B″C″K″, el punto I se habria colocado en F; luego I seria el centro de semejanza de A′B′C′K′ correspondiente al de ABCK.

823. Antes de pasar á otra cosa, observarémos que *en dos circunferencias distintas* (fig. 137) *son semejantes los arcos* AMB, A′M′B′ *sectores* OAMB *y* O′A′M′B′, *y segmentos* AMBA *y* A′M′B′A′ *correspondientes á ángulos del centro iguales;* porque si se hace coincidir á los dos ángulos, se verá inmediatamente que el radio del mayor de los dos arcos y las rectas que van desde su centro á la cuerda, quedan cortadas en partes proporcionales por el arco menor y la cuerda de este.

De aquí se puede deducir que *dos circunferencias son semejantes;* pero es tambien fácil demostrarlo *a priori.*

En efecto, del n.° 253 se deduce que *las rectas*, tales como AA′ ó AA″ *que unen las estremidades de dos radios paralelos y dirigidos en el mismo sentido ó en sentidos contrarios, concurren en un mismo punto* C *ó* C′ *de la recta* OO′ *que une sus centros;* y ahora digo que cada uno de los puntos C y C′ es un centro de semejanza comun á las dos circunferencias; pues si por el C se tira un radio vector cualquiera CB′B, y se unen O con B y O′ con B′, las rectas OB y O′B′ serán paralelas, porque si no, tirando por el centro O el radio OI paralelo á O'B', y uniendo I con B', la IB' iria á pasar por C, lo que es imposible. Por lo tanto, los triángulos OCB y O'CB' serán equiángulos, la razon de CB á CB' la misma que la de OB á O'B', y por consiguiente, esta razon permanecerá siempre constante.

Podemos, pues, decir que dos circunferencias son dos curvas semejantes que tienen dos centros de semejanza comunes; uno C se llama *centro de semejanza* DIRECTO, y el otro C' *centro de semejanza* INVERSO; porque los radios vectores homólogos que parten de este están dirigidos en sentidos contrarios.

TEOREMA II.

824. *Si dos figuras son semejantes, y la una es rectilínea, la otra tambien lo será; cada una tendrá el mismo número de ángulos y lados que la otra; sus ángulos serán iguales uno á uno, y sus lados homólogos* (los adyacentes á los ángulos iguales) *proporcionales.*

Siendo las dos figuras semejantes, se las podrá colocar de manera que tengan un mismo centro de semejanza O (fig. 333). Unamos este punto con los vértices A, B, C... de la figura rectilínea, y sean A', B', C'... los puntos en que las rectas de union encuentran al perímetro de la segunda. Si se tira A'B', se verá que esta recta, por ser paralela á AB (**246**), corta en partes proporcionales con OA y OA á todas las rectas tiradas desde O á AB (**252**); mas la parte del perímetro de la segunda figura que está comprendida entre OA' y OB' goza de la misma propiedad; luego coincide con A'B'; por lo que á cada lado del polígono ABCDE corresponde otro de la segunda figura : esta será, por consiguiente, un polígono, y *los vértices homólogos de ambas se hallarán situados sobre rectas bajadas desde el punto* O. Además, los ángulos de las dos figuras serán iguales uno á uno por tener sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido; y por último, sus lados homólogos serán proporcionales, porque gozando de esta propiedad los triángulos semejantes, la razon de AB con A'B' es la misma que la de OA con OA', y por consiguiente, constante.

825. ESCOLIO. Notemos que se hubiera podido escoger para centro de semejanza uno cualquiera de los vértices del polígono ABCDE, y que entonces el del segundo hubiera sido el vértice homólogo del mismo.

Si el centro de semejanza del primer polígono hubiese estado en I sobre uno cualquiera de los lados AB, el del segundo hubiera dividido al lado *ab* homólogo de aquel en la razon de AI á BI.

En fin, cuando el centro de semejanza del polígono ABCDE sea un punto cualquiera O de su plano, se obtendrá el del segundo, construyendo sobre uno cualquiera de sus lados *ab* un triángulo equiángulo con el OAB, que tenga por base al lado homólogo de ABCDE.

826. De aquí se deduce que *en dos polígonos semejantes son proporcionales los lados y las diagonales homólogas.*

Teorema III.

827. Recíprocamente, *dos polígonos son semejantes cuando tienen iguales sus ángulos uno á uno, y proporcionales los lados homólogos.*

Sean ABCDE y A'B'C'D'E' (fig. 333) los dos polígonos cuyos vértices homólogos supondrémos que están nombrados con las mismas letras. *Coloquémoslos de modo que dos ángulos homólogos* A *y* A' *tengan sus lados homólogos paralelos y dirigidos en el mismo sentido*, lo que es posible, porque se supone que dichos ángulos son iguales. En virtud de esta colocacion, y de ser equiángulos entre sí los dos polígonos, todos los demás lados homólogos quedarán paralelos y dirigidos en el mismo sentido; así, la igualdad de los ángulos B y B' exige que los lados CB y C'B' sean paralelos y estén dirigidos en el mismo sentido. Por otra parte, tienen los dos polígonos proporcionales sus lados homólogos; luego, en virtud del n.° 253, las rectas AA', BB' y CC' se cruzarán en un mismo punto O; tambien DD' concurrirá con AA' y BB' en el mismo punto, y así todas las demás, de modo que las rectas que unen los vértices homólogos de los dos polígonos concurren todas en un mismo punto O; pero estos polígonos tienen además sus lados paralelos; luego todos los radios vectores homólogos bajados desde O son proporcionales, y los polígonos semejantes.

828. Escolio. Harémos observar que *basta para que los polígonos sean semejantes con que tengan todos sus lados menos uno proporcionales, y los ángulos comprendidos por estos lados iguales uno á uno*, ó tambien *que todos sus ángulos menos uno sean iguales respectivamente, y proporcionales los lados adyacentes á aquellos ángulos.* Porque, suponiendo satisfecha esta condicion de modo que

$$E=E', \quad A=A', \quad B=B', \quad C=C',$$

y que

$$\frac{AE}{A'E'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'},$$

repitiendo el razonamiento hecho en el n.° **827**, encontrarémos que las rectas EE′, AA′, BB′ y CC′ van todas á pasar por un mismo punto O; y digo ahora que el D′ se halla sobre la recta OD, porque las E′D′ y C′D′, por ser paralelas respectivamente á las ED y CD, deben dividir á OD, la una en la razon de OE′ á E′E, y la otra en la de OC′ á C′C, es decir, en una misma razon; luego las E′D′ y C′D′ deben concurrir en un mismo punto sobre OD.

829. Corolario. 1.° *Todos los cuadrados son semejantes; 2.° dos rombos que tengan un ángulo igual; 3.° dos rectángulos en que los dos lados adyacentes sean proporcionales; 4.° dos paralelógramos que tengan un ángulo igual comprendido entre lados proporcionales, son semejantes.*

Teorema IV.

830. *Dos polígonos semejantes cualesquiera pueden descomponerse en un mismo número de triángulos semejantes uno á uno y semejantemente colocados.*

En primer lugar, es posible descomponer uno de los polígonos, por ejemplo el ABCDE (fig. 333), en triángulos; y despues, repitiendo la demostracion del n.° **824**, se reconocerá que pueden colocarse los dos de modo que sus vértices homólogos queden sobre rectas que concurran en su centro comun de semejanza O, y dividan á estas en partes proporcionales. Por consiguiente, todos sus lados y diagonales homólogas son paralelas, y los triángulos ABE y A′B′E′, BED y B′E′D′, etc., semejantes uno á uno (**818**) y semejantemente colocados [1].

Si los triángulos en que se descompone el polígono ABCDE tuviesen algunos vértices que no lo fueran del polígono, tales como el S, se uniria este punto con O, y se dividiria la recta OS en el punto S′ en partes proporcionales con OA′ y AA′, se uniria S′ con A′, B′ y E′, y como las rectas de union serian respectivamente paralelas á SA,

---

[1] Véase la nota [1] de la página 108.

SB, SE (**246**), resultarian semejantes los triángulos ASB y A'S'B', ASE y A'S'E', etc. (818

TEOREMA V.

831. Recíprocamente, *dos polígonos compuestos de igual número de triángulos semejantes uno á uno, y semejantemente colocados, son semejantes.*

Colóquense ambos de modo que dos ángulos homólogos A *y* A' *de dos de los triángulos semejantes tengan paralelos sus lados homólogos, y además de paralelos dirigidos en el mismo sentido.* Por esta colocacion, y porque todos los triángulos de que se componen los polígonos son semejantes uno á uno y están semejantemente colocados, los lados homólogos de ambos triángulos resultarán paralelos y dirigidos en el mismo sentido. Así, que la igualdad de los ángulos ABC y A'B'C', CBD y C'B'D'... exige que los lados BC y B'C', CD y C'D'... queden en la misma disposicion; pero como estos lados son además proporcionales, resulta del n.° **253** que las rectas AA', BB', EE' irán á cruzarse en un mismo punto O; igualmente irá CC' á concurrir en este punto con las BB' y EE', y así sucesivamente, de modo que las rectas que unen los vértices homólogos de los dos polígonos todas concurren en O. Pero estos polígonos tienen además todos sus lados paralelos; luego los radios vectores homólogos bajados desde O son proporcionales, y los polígonos, por consiguiente, semejantes.

832. COROLARIO. *Dos polígonos son iguales cuando están compuestos de igual número de triángulos iguales uno á uno é igualmente colocados.*

TEOREMA VI.

833. *Dos polígonos* ABCDE *y* A'B'C'D'E' (fig. 334, lám. XIII) *son semejantes cuando, uniendo las estremidades de dos rectas* FG *y* F'G' *con todos los vértices de los polígonos, los triángulos que resulten sean semejantes uno á uno y queden semejantemente colocados.*

Colóquense los polígonos de manera que dos ángulos homólogos F y F' de los dos triángulos semejantes FAG y F'A'G' tengan paralelos y dirigidos en el mismo sentido sus lados homólogos. En virtud del teorema n.° **253**, las tres rectas FF', AA' y GG' concurrirán en un mismo punto O; pero siendo semejantes los triángulos BFG y

B′F′G′, y estando semejantemente colocados, FB y F′B′ serán paralelas; luego BB′ irá á concurrir con FF′ y GG′ en el mismo punto O, lo que tambien se verificará con las CC′, DD′ y EE′. Por consiguiente, las rectas que unen los vértices homólogos de los dos polígonos concurren en un mismo punto, y como estos tienen además todos sus lados paralelos, por cuanto los puntos A′, B′, C′... dividen á OA, OB, OC... en partes proporcionales (244), resulta que todos los radios vectores homólogos tirados desde O serán tambien proporcionales, y por consiguiente, semejantes los dos polígonos.

Teorema VII.

834. *Los perímetros de dos polígonos semejantes son proporcionales con los lados homólogos de los mismos.*

Véase el n.° 294.

835. Las condiciones de semejanza de dos polígonos deben contener implícitamente las de los triángulos; pero se concibe, sin embargo, que algunas de estas condiciones pueden ser consecuencias ndispensables de las otras. Así es, por ejemplo, que dos rombos son semejantes con solo que tengan un ángulo igual (829). Con efecto, se ha reconocido que dos triángulos son semejantes en los cinco casos que vamos á examinar sucesivamente.

Teorema VIII.

836. *Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos ángulos del uno iguales á dos del otro.*

Con efecto, sus lados homólogos son proporcionales, y por lo tanto, estos triángulos satisfacen á las condiciones enunciadas en el n.° 827.

Tambien se podria demostrar esta proposicion directamente. Para esto, supongamos que ABC y A′B′C′ (fig. 109) sean los dos triángulos propuestos. Tomemos en el primero de ellos AD = A′B′, AF = A′C′, y unamos D con F. El triángulo ADF será igual al A′B′C′ (181), porque el ángulo A = A′; por consiguiente, los homólogos B′ y D serán iguales, y lo serán entonces B y D, por lo cual las rectas DF y BC resultan paralelas; luego todos los radios vectores tirados desde A á BC quedarán cortados por DF en partes proporcionales, y resultarán semejantes los triángulos ABC y ADF, ó sea A′B′C′.

Teorema IX.

837. *Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus lados respectivamente paralelos.*
Véase el n.° 279.

Teorema X.

838. *Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus lados respectivamente perpendiculares.*
Véanse los n.os 280 y 281.

Teorema XI.

839. *Dos triángulos* ABC *y* A′B′C′ (fig. 109) *son semejantes cuando sus lados son proporcionales.*

Supongamos que los AB, AC y BC lo sean respectivamente á los A′B′, A′C′, B′C′, tomemos, como en el n.° 836, AD=A′B′, AF=A′C′, y tiremos la DF. Esta recta cortará á los lados AB y AC en partes proporcionales, y será por lo mismo paralela á BC, por cuya razon los triángulos ADF y ABC serán semejantes y tendrán proporcionales sus lados homólogos. Por consiguiente,

$$\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DF},$$

pero por hipótesis teníamos

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'},$$

y como AD = A′B′, tienen estas dos proporciones tres términos correspondientes iguales; luego tambien lo serán los cuartos DF y B′C′, y resultará que el triángulo A′B′C′ es igual al ADF (189), y por lo mismo semejante al ABC.

Teorema XII.

840. *Dos triángulos* ABC, A′B′C′ *son semejantes cuando tienen igual un ángulo* A=A′ *que esté comprendido entre los lados propor-*

cionales AB y A'B', AC y A'C'; es decir, cuando se verifique la proporcion

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}.$$

Esto es una consecuencia inmediata del escolio n.° **828**; y aun se podria demostrar *a priori* repitiendo la del n.° **836**.

§ II.—Superficies y cuerpos semejantes.

841. *Dos* SUPERFICIES SON SEMEJANTES *cuando puede colocárselas de tal modo que, tirando desde un mismo punto rectas á todos los de estas, los radios vectores que coincidan en direccion resulten proporcionales.*

Los CUERPOS *terminados por tales superficies se llaman tambien* SEMEJANTES.

842. De esta definicion se deduce inmediatamente que, *cortando una pirámide por un plano paralelo á su base, la deficiente será semejante á la total* (**466**).

Teorema XIII.

843. *Cuando dos superficies son semejantes, cualquiera que sea el punto del espacio que se tome para centro de semejanza de la una, siempre habrá para la otra un centro de semejanza correspondiente.*

Igual demostracion que en el n.° **821**.

Teorema XIV.

844. *Dos conos rectos, dos troncos de conos rectos de bases paralelas y dos cilindros rectos son semejantes cuando están engendrados por figuras semejantes que hayan girado alrededor de dos lados homólogos.*

La misma demostracion que en el n.° **823**.

Teorema XV.

845. *Dos casquetes, segmentos ó sectores esféricos son semejantes cuando corresponden á superficies cónicas iguales.*

Dos zonas son semejantes cuando son diferencias de casquetes semejantes.

Dos rebanadas esféricas son semejantes cuando corresponden á zonas semejantes.

Dése la misma demostracion que en el n.° 823.

846. Corolario. *Dos esferas son siempre semejantes.* Tienen dos centros de semejanza, de los que cada uno es centro de una superficie cónica tangente á las dos esferas (823).

Teorema XVI.

847. *Dos triángulos esféricos son semejantes cuando corresponden á triedros iguales.*

Dos husos y dos cuñas son semejantes siempre que correspondan á ángulos diedros iguales.

Es una consecuencia precisa de las definiciones de cuerpos y superficies semejantes.

Teorema XVII.

848. *Si dos cuerpos son semejantes, y el uno es un poliedro, tambien lo será el otro: ambos tendrán igual número de caras; estas serán semejantes y se hallarán semejantemente colocadas* (1), *y los ángulos diedros y poliedros serán iguales uno á uno.*

Siendo semejantes los dos cuerpos, podrá colocárselos de modo que tengan un centro comun O de semejanza (fig. 334, lám. XIII). Por este y por cada arista del poliedro harémos pasar planos, y formarémos una série de pirámides que tendrán todas por vértice comun O, y por bases las diferentes caras del poliedro. Sean OABCDE una cualquiera de estas pirámides, y A′, B′, C′, D′, E′ los puntos en que sus aristas cortan á la superficie del segundo cuerpo: estos puntos, por dividir á las aristas en partes proporcionales (841), se hallarán en un mismo plano paralelo á la base ABCDE (467), que dividirá tambien en partes proporcionales á todas las rectas que van desde O á esta base. Pero tambien la superficie del segundo cuerpo

(1) Es decir: 1.° que los dos ángulos cuyo vértice comun se halle en una de las dos estremidades de la recta que une las dos caras del primer poliedro á las que pertenecen, sean homólogos de aquellos cuyo vértice comun esté en una de las estremidades de la recta que une las dos caras semejantes del segundo; 2.° que, colocando una de estas dos caras sobre su correspondiente, de modo que coincidan dos lados homólogos, queden las otras dos caras á un mismo lado del plano comun.

goza de esta propiedad; luego la porcion de ella comprendida en la pirámide coincide con el polígono A'B'C'D'E', y es, por consiguiente, semejante á ABCDE; luego á cada cara del poliedro corresponde una semejante en el segundo cuerpo, el cual por lo tanto será tambien un poliedro, y *los vértices homólogos de ambos estarán situados en rectas tiradas desde el punto* O. Además, todos los ángulos diedros homólogos son iguales por tener sus caras paralelas y dirigidas en el mismo sentido; y finalmente, los ángulos poliedros serán iguales uno á uno, porque los ángulos planos que los forman son homólogos de polígonos semejantes; y tendrán tambien sus caras homólogas semejantes, semejantemente colocadas é igualmente inclinadas entre sí.

849. ESCOLIO. Observarémos que hubiera podido tomarse por centro de semejanza uno cualquiera de los vértices del poliedro, y entonces el centro de semejanza del segundo hubiera sido el vértice que fuera homólogo con aquel en el mismo segundo poliedro.

850. De aquí se sigue que *en dos poliedros semejantes son proporcionales las aristas y diagonales homólogas.*

TEOREMA XVIII.

851. Recíprocamente, *dos poliedros* P *y* P' *son semejantes cuando tienen sus caras semejantes una á una, semejantemente colocadas y con igual inclinacion.*

Coloquemos los dos poliedros de manera que dos ángulos homólogos A *y* A' *de dos caras semejantes tengan sus lados homólogos paralelos y en el mismo sentido.* De esta colocacion, y de que estas dos caras son equiángulas entre sí, se deduce que todos sus lados homólogos serán paralelos y estarán dirigidos en el mismo sentido. Mas sus lados son además proporcionales; luego las rectas que unan los vértices homólogos de estas dos caras concurrirán en un mismo punto O, porque el teorema del n.° 253 es verdadero, aun cuando los ángulos no estén en el mismo plano. Pero el diedro GABC es igual al G'A'B'C'; y como las caras homólogas se hallan semejantemente colocadas por hipótesis, se sigue que el plano A'B'F'G' es paralelo á ABFG, y que las aristas homólogas de estas dos caras son paralelas y están dirigidas en el mismo sentido. Puesto que son proporcionales, FF' y GG' irán á concurrir con AA' y BB' en O, y lo mismo se verificará para todas las otras caras, de suerte que las rectas que unan los vértices homólogos de los dos poliedros concurrirán en este punto O. Pero estos poliedros tienen tambien todas sus caras paralelas; luego todos los radios vectores homólogos tirados desde O son proporcionales, y por consiguiente, los poliedros semejantes.

852. Corolario. 1.° *Todos los cubos son semejantes;* 2.° *dos paralelepípedos rectángulos que tengan sus aristas proporcionales;* 3.° *dos paralelepípedos oblícuos que tengan un ángulo triedro igual comprendido entre aristas proporcionales;* 4.° *dos prismas que tengan un ángulo triedro comprendido entre los planos de tres polígonos semejantes uno á uno y semejantemente colocados, son semejantes;* porque todas las caras laterales son semejantes una á una (829); y como desde luego se hallan semejantemente colocadas, sus triedros, y por consiguiente, sus diedros homólogos son iguales.

853. Observemos que el teorema precedente encierra mas condiciones que las necesarias para establecer la semejanza de dos poliedros (621).

Teorema XIX.

854. *Dos poliedros semejantes cualesquiera pueden ser descompuestos en un mismo número de pirámides semejantes una á una y semejantemente colocadas* [1].

Desde luego podemos descomponer uno de los poliedros propuestos en pirámides (616). Supuesto esto, repitiendo la demostracion del n.° 848, se reconocerá que los poliedros pueden colocarse de modo que sus vértices homólogos se encuentren sobre las rectas que concurren en el mismo punto O, que es su centro comun de semejanza, y las dividan en partes proporcionales. Por consiguiente, todas sus caras y planos diagonales homólogos serán paralelos (467); luego las pirámides formadas por estas caras y planos son semejantes y están semejantemente colocadas.

Si los vértices de las pirámides en que se ha descompuesto el primer poliedro son distintos de los del mismo poliedro, tales como el S, se unirá O con S; se dividirá la recta de union en partes proporcionales á OA′ y á A′A en el punto S′, despues hágase pasar planos por S′ y por las aristas homólogas á las de las pirámides cuyo vértice se halla en S, y como estos planos S′A′B′, S′A′E′..... serán paralelos respectivamente á SAB, SAE....., se concluirá que cada

---

[1] Véase la cita del párrafo 621.

dos pirámides, tales como SABCDE y S'A'B'C'D'E' son semejantes y tienen el punto O por centro de semejanza.

855. ESCOLIO. Si se observa que dos pirámides cualesquiera pueden dividirse en tetráedros semejantes y semejantemente colocados, podrá darse el siguiente enunciado del anterior teorema:

Dos poliedros semejantes cualesquiera pueden descomponerse en un mismo número de tetráedros semejantes uno á uno y semejantemente colocados.

TEÓREMA XX.

856. Recíprocamente, *dos poliedros que se hallan compuestos de un mismo número de pirámides* SABCDE *y* S'A'B'C'D'E', SABFG *y* S'A'B'F'G'..., *semejantes una á una y semejantemente colocadas, son semejantes.*

Coloquemos, en efecto, *los dos poliedros de manera que dos ángulos homólogos* BAE *y* B'A'E' *de dos pirámides semejantes tengan sus lados homólogos paralelos y dirigidos en el mismo sentido.* Se sigue de esta colocacion y de la semejanza de las dos caras á que pertenecen estos ángulos, que todos los lados homólogos de ellas serán paralelos y estarán dirigidos en el mismo sentido; y como estos lados son además proporcionales, las rectas que unan sus vértices homólogos concurrirán en un mismo punto O. Pero el diedro S'A'B'C' es igual á SABC (847); y por lo tanto el plano S'A'B' es paralelo á SAB y las aristas homólogas de estas dos caras semejantes serán paralelas y estarán dirigidas en el mismo sentido; luego SS' irá á concurrir en O con AA' y BB'. Pero siendo las pirámides que componen los dos poliedros semejantes una por una y estando semejantemente colocadas, los ángulos diedros SABF y S'A'B'F' son iguales; por consiguiente, las caras ABFG y A'B'F'G' tendrán sus planos paralelos, sus aristas homólogas tambien paralelas, proporcionales y dirigidas en el mismo sentido; de modo que las rectas FF' y GG' irán á concurrir con AA' y BB' en O. Vemos así que las rectas que unen los vértices homólogos de los dos poliedros concurren todas en O; y como estos poliedros tienen además sus caras paralelas, todos los radios vectores homólogos tirados desde O son proporcionales, y por consiguiente, los poliedros semejantes.

857. COROLARIO. *Dos poliedros son iguales cuando están compuestos de un mismo número de pirámides iguales una á una y semejantemente colocadas.*

858. Las condiciones de semejanza de dos poliedros comprenden implícitamente las que determinan la semejanza de dos tetráedros; pero bien se concibe sin embargo que algunas de estas condiciones pueden ser una consecuencia indispensable de las otras. Así es, por ejemplo, que dos prismas son semejantes nada mas con que tengan un triedro que esté comprendido entre tres polígonos semejantes uno por uno y semejantemente colocados (852). Se ha reconocido que dos tetráedros son semejantes en los cuatro casos que vamos á examinar sucesivamente.

Teorema XXI.

859. *Dos tetráedros son semejantes cuando tienen sus aristas proporcionales y las caras formadas por las aristas homólogas están semejantemente colocadas.*

Sobre las aristas SA, SB, SC (fig. 245), tomo las partes SD, SE, SF iguales respectivamente á las S'A', S'B', S'C', y por los puntos D, E y F hago pasar un plano. Este será paralelo á ABC, porque divide á las aristas del triedro S en partes proporcionales, y por consiguiente, el tetráedro SDEF será semejante al SABC (842). Pero además es igual al S'A'B'C', porque siendo las caras de los dos tetráedros propuestos semejantes una á una (275), las del triedro S son respectivamente iguales á las del S'; y como hemos supuesto que se encontraban colocadas semejantemente, los dos triedros son iguales; de forma que los tetráedros S'A'B'C' y SDEF son superponibles; luego S'A'B'C' es semejante á SABC.

860. Corolario. Formando un tetráedro con cuatro vértices de un poliédro, y otro con los cuatro que sean homólogos á estos en otro poliedro semejante al primero, los dos tetráedros así formados son semejantes entre sí (850).

Teorema XXII.

861. *Dos tetráedros* SABC *y* S'A'B'C' *son semejantes cuando tienen igual un ángulo diedro comprendido entre dos caras* SAB *y* S'A'B', SAC *y* S'A'C' *semejantes y semejantemente colocadas.*

Véase el n.° 624.

TEOREMA XXIII.

862. *Dos tetráedos son semejantes cuando tienen una cara semejante adyacente á tres ángulos diedros iguales uno á uno, cuyas caras homólogas se hallen semejantemente colocadas.*

Véase el n.º 625.

TEOREMA XXIV.

863. *Dos tetráedros son semejantes cuando tienen sus ángulos diedros iguales uno á uno y sus caras homólogas semejantemente colocadas.*

Véanse los n.os 626 y 627.

TEOREMA XXV.

864. *Si se corta una superficie cónica por dos planos paralelos, las intersecciones serán curvas semejantes, cuya razon de semejanza será la misma que la de las partes de una misma generatriz comprendidas entre estos planos y el centro, y cuyas áreas serán proporcionales á los cuadrados de las distancias de los planos secantes á dicho centro de la superficie.*

Tirando por el centro S (fig. 231) una recta SO cualquiera, y haciendo pasar un plano por esta y por la generatriz SA cuyas trazas sobre los dos secantes supondrémos que sean AO y A′O′, los triángulos SAO y S′A′O′ serán equiángulos, y por consiguiente la razon de $\frac{AO}{A'O'}$ igual á la de $\frac{SA}{SA'}$. Pero esta última es constante (466); luego tambien lo será la primera y semejantes las dos curvas de interseccion, siendo efectivamente $\frac{SA}{SA'}$ la razon de su semejanza.

Las áreas de las dos secciones son proporcionales á los cuadrados de los radios vectores homólogos AO y A′ O′, y por consiguiente, tambien á los de las líneas SO y SO′; luego si se ha tirado SO per-
' plano AOB, está demostrada la segunda parte del

SIMETRÍA.

865. *Dos* SUPERFICIES *son* SIMÉTRICAS *cuando se las puede colocar de modo que todas las rectas tiradas por un cierto punto del espacio las corten en puntos que estén equidistantes de dos en dos de aquel de que se trata. Este se llama* CENTRO DE SIMETRÍA *de las dos superficies, y se dice que estas son simétricas respecto á él.*

Los CUERPOS *terminados por superficies simétricas son* SIMÉTRICOS.

866. Se deduce inmediatamente de esta definicion que, *cortando dos ángulos poliedros opuestos por el vértice por dos planos paralelos y equidistantes de este, las pirámides que resulten serán simétricas.*

TEOREMA I.

867. *Cuando dos superficies son simétricas, puede colocárselas de modo que cualquier punto del espacio sea su centro de simetría.*

Con efecto, por la circunstancia de ser simétricas se las puede poner de manera que, tirando desde un cierto punto O (fig. 335) radios vectores á los diferentes puntos A, B, C... de la primera, prolongados estos una cantidad igual á sí mismos, vayan á pasar por los A′, B′, C′... de la segunda. El punto O es, por consiguiente, el centro de simetría. Supuesto esto, tomemos un punto arbitrario F, y unámosle con los O, A, B, C... Tiremos A′I paralela á AF hasta que encuentre á OF, unamos B′ con I, y entonces tendrémos OI = OF por la igualdad de los triángulos AOF, A′OI (183); luego los OFB y OIB′ son iguales (181); por consiguiente, B′I = BF y paralelo; y en virtud de esto, tirando por los puntos A′, B′, C′... paralelas á A′A″, B′B″, C′C″... á la FI, hasta que encuentren respectivamente á AF, BF, CF..., dichas paralelas serán iguales á FI, y la superficie que sea el lugar de todos los puntos A″, B″, C″... no será mas que la A′B′C′... trasladada paralelamente á sí misma. Pero FA″, FB″, FC″... son iguales á IA′, IB′, IC′..., y por lo tanto, á FA, FB, FC...; luego F es un centro de simetría de las dos superficies ABC... y A″B″C″...

TEOREMA II.

868. *Dos cuerpos simétricos pueden colocarse simétricamente respecto á cualquier plano dado;* es decir, que se los puede poner de modo que los puntos homólogos de sus superficies queden á distancias iguales del plano de que se trata y sobre una misma perpendicular á este plano.

Colóquense los dos cuerpos simétricamente respecto á un punto cualquiera O del plano MN (fig. 251), y tírese por este punto una perpendicular OZ á este plano.

Véase el n.° 636.

Teorema III.

869. Recíprocamente, *si dos cuerpos* ABC... *y* A″B″C″... *son simétricos respecto á un plano* MN, *se pueden colocar simétricamente respecto á un punto cualquiera* O *de este plano, y por consiguiente respecto á cualquier punto del espacio.*

Véase el n.° 637.

870. Segun resulta de la definicion de los cuerpos simétricos y del teorema del n.° 867, existe una gran analogía entre estos cuerpos y los semejantes. La razon de semejanza es en este caso la unidad; pero los radios vectores homólogos, en vez de ir en el mismo sentido, van en contrario. Así se comprende fácilmente que, introduciendo estas dos modificaciones en los enunciados y demostraciones de los teoremas que hemos establecido acerca de los cuerpos semejantes, se tendrán los enunciados y demostraciones de los correspondientes acerca de los simétricos.

Teorema IV.

871. *Si dos cuerpos son simétricos, y uno de ellos es un poliedro, tambien lo será el otro; ambos tendrán igual número de caras; estas serán iguales una por una, y estarán inversamente colocadas; sus ángulos diedros serán iguales uno por uno, y los ángulos poliedros simétricos* (848).

872. Corolario. *Las aristas y diagonales homólogas de dos poliedros simétricos son iguales* (850).

Teorema V.

873. Recíprocamente, *dos poliedros son simétricos cuando tienen sus caras iguales una por una, inversamente colocadas é igualmente inclinadas* (851).

$$P - \text{circunf.}^a\, R < \delta, \qquad [4]$$

y tambien poniendo en [1] circunf.ª R en lugar de P, y en virtud de la desigualdad [3], se podrá escribir

$$\text{Circunf.}^a\, R - p < \delta. \qquad [5]$$

Ahora bien, el segundo miembro de las desigualdades [4] y [5] tiene por límite cero; luego este mismo debe ser el de los primeros miembros, y por consiguiente,

$$\text{lím.}\, P = \text{circunf.}^a\, R, \quad \text{y} \quad \text{circunf.}^a\, R = \text{lím.}\, p.$$

351.** Voy á esponer otro método para hallar la relacion aproximada de la circunferencia al diámetro por el llamado de los isoperímetros, tomándolo de la *Geometría* de Mr. Vincent.

Se dice que un polígono es isoperímetro con otro, cuando constando el segundo de doble número de lados que el primero, tienen ambos igual perímetro.

Si dividimos en dos partes iguales cada uno de los lados de un cuadrado, y con los ocho resultantes formamos un octógono, este será isoperímetro con el cuadrado, y tambien lo será con el polígono de diez y seis lados formado por las mitades de los suyos. Considerando que de este modo se duplique el número de lados de un polígono sin aumentar su perímetro, cuando aquel llegue á ser infinito, la circunferencia resultante será isoperímetra con cada uno de ellos.

El método de que vamos á ocuparnos se funda en el siguiente

LEMA (fig. 336).

Dados el radio R *y la apotema* r *de un polígono regular, hallar el radio* R_1 *y la apotema* r_1 *de un polígono regular isoperímetro de duplo número de lados.*

Constrúyase el círculo circunscripto al polígono dado, y sean AB uno de sus lados, AOB su ángulo en el centro, OA = R el radio, y QP = r la apotema.

Bajo este supuesto, debiendo ser el ángulo en el centro del nuevo polígono la mitad del ángulo AOB (109), si prolongamos la PO hasta encontrar en C la circunferencia, y tiramos las cuerdas AC, BC, el ángulo ACB, mitad de AOB (117 y 110), será el ángulo del nuevo polígono.

Igualmente si tiramos la OA′ perpendicular á CA, y trazamos la A′B′ paralela á AB, tendrémos (244) $A'B'=\frac{1}{2}AB$ para lado del nuevo polígono, y por consiguiente, CA′, CP′ serán su radio y su apotema.

Todo, pues, se reduce á determinar $CA'=R_1$, $CP'=r_1$; y para esto, los triángulos semejantes CAP, CA′P′ dan

$$CP'=\tfrac{1}{2}CP=\tfrac{1}{2}(CO+OP)=\tfrac{1}{2}(OA+OP);$$

luego 1.°

$$r_1=\tfrac{1}{2}(R+r).$$

En segundo lugar, el triángulo rectángulo OA′C da (260, 3.°)

$$\overline{CA'^2}=CO\times CP'=OA\times CP';$$

luego 2.°

$$R_1=\sqrt{R\times r_1};$$

y como ya conocemos á r_1, tenemos resuelto el problema.

Advertencia. Estas fórmulas son mucho mas sencillas que las empleadas en el n.° 351, porque no exigen mas que la determinacion alternativa de medios diferenciales $\frac{1}{2}(R+r)$, y proporcionales $\sqrt{R\times r_1}$.

Escolio I. De la primera de estas dos fórmulas se deduce, á causa de ser $r<R$, que

$$r_1>\tfrac{1}{2}(r+r),\quad \text{ó}\quad r_1>r;$$

y de la segunda, á causa de ser $r_1<\frac{1}{2}(R+R)$, ó $r_1<R$, resulta

$$R_1<\sqrt{R\times R},\quad \text{ó}\quad R_1<R;$$

lo cual hace ver que el radio del segundo polígono es menor que el del primero, mientras que, por el contrario, la apotema del segundo polígono es mayor que la del primero; de donde se deduce que *la diferencia entre el radio y la apotema mengua indefinidamente* á medida que crece el número de lados.

Escolio II. Además puede demostrarse como en el párrafo precedente, que la *diferencia* (R_1-r_1) *es menor que la cuarta parte de la diferencia* $(R-r)$.

En efecto, sea c el lado del polígono que se toma por punto de partida; $\frac{c}{2}$ es entonces el lado del polígono isoperímetro de duplo número de lados; y tendrémos (262) las dos relaciones

$$R^2-r^2=\frac{c^2}{4},\quad R_1^2-r_1^2=\frac{c_1^2}{4}=\frac{c^2}{16}=\tfrac{1}{4}(R^2-r^2);$$

de donde se deduce

$$R_1-r_1=\tfrac{1}{4}(R-r)\times\frac{R+r}{R_1+r_1}=\tfrac{1}{4}(R-r)\frac{2r_1}{R_1+r_1};$$

luego, á causa de ser $2r_1<R_1+r_1$, será

$$R_1-r_1<\tfrac{1}{4}(R-r),$$

como se queria demostrar.

Esto prueba con qué rapidez disminuyen las diferencias $(R-r)$, (R_1-r_1), (R_2-r_2).....

Aplicacion de las dos fórmulas precedentes al cálculo del número π.

Observemos ante todo que, siendo toda circunferencia de círculo (351*) el límite superior de una série de polígonos regulares cuyo número de lados va creciendo en progresion dupla, si empezamos por el cuadrado, por ejemplo, cuyo lado es igual á 1, y cuyo perímetro es, por consiguiente, igual á 4, y determinamos sucesivamente los radios R, R_1, R_2,..... y las apotemas r, r_1, r_2....., del cuadrado y de los polígonos de 8, 16, 32....., lados isoperímetros con el cuadrado, llegarémos finalmente al radio R_n y á la apotema r_n de un polígono cuyo perímetro, siempre igual á 4, no diferirá sensiblemente (351, *nota* 2.ª) de una circunferencia de círculo que tenga por radio R_n; de donde resulta que $\frac{4}{R_n}$ será un valor muy aproximado de la relacion de la circunferencia al radio; y dividiendo por 2, se obtendrá con mucha aproximacion el número designado por π.

Resulta además de lo que se dijo en el escolio primero, que el número π está siempre comprendido entre los diferentes pares de espresiones $\frac{2}{r}$ y $\frac{2}{R}$, $\frac{2}{r_1}$ y $\frac{2}{R_1}$, $\frac{2}{r_2}$ y $\frac{2}{R_2}$....., lo cual permite determinar en cada operacion el grado de aproximacion obtenido. La parte comun á las dos espresiones $\frac{2}{r_n}$, $\frac{2}{R_n}$, reducidos á decimales, representa el valor de π, faltándole menos de una unidad del órden inferior de dicha parte comun. Solo se trata, pues, de saber cómo pueden calcularse los números R y r, R_1 y r_1, R_2 y r_2..... Ahora bien; suponiendo en la figura 337 que $AB=1$ sea el lado del cuadrado, como el triángulo AOP es entonces isósceles, y por consiguiente, $AP=OP$, se deduce

1.° $$OP=\tfrac{1}{2}AB=\tfrac{1}{2}, \quad \text{de donde} \quad r=\tfrac{1}{2};$$

2.° $$OA\ \sqrt{2\overline{AP}^2}=\sqrt{2}\,\tfrac{1}{2}, \quad \text{de donde} \quad R=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Siendo conocidos R y r, las dos fórmulas

$$r_1=\tfrac{1}{2}(R+r), \quad R_1=\sqrt{Rr_1},$$

harian conocer á R_1 y r_1, que son el radio y la apotema del octógono regular isoperímetro con el cuadrado; y sustituyendo en las mismas fórmulas R_1 y r_1 en lugar de R y r, se obtendrian el radio R_2 y la apotema r_2 del polígono de diez y seis lados, continuándose despues del mismo modo. Pero si se quiere convertir inmediatamente todos estos resultados en fracciones decimales, se debe recurrir al medio esplicado en el principio de este método. Despues de haber reducido á decimales los valores $R=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$ y $r=\tfrac{1}{2}$, se saca la semi-suma de estas dos fracciones, y así se obtiene el valor de r_1; despues se multiplica este valor de r_1 por el de R, y estrayendo la raiz cuadrada del producto, se tiene el valor de R_1. Operando despues con R_1 y r_1 como se ha hecho con R y r, se hallarán los valores de R_2 y r_2, y así se continuará indefinidamente.

Este procedimiento se reasume en la regla siguiente : *fórmese una série de números que empiece por* 0 *y* 1, *y que desde el tercero inclusive vayan siendo alternativamente medios por diferencia y medios por cociente entre los dos que inmediatamente les precedan : esta série converge sin cesar hácia el valor del radio de una circunferencia igual á* 4.

Advertencia. Todas estas multiplicaciones y estracciones de raices cuadradas deben efectuarse por los medios abreviados que enseña la *Aritmética* (1).

Hé aquí la tabla de los resultados que se obtienen haciendo el cálculo en esa forma :

---

(1) En la de Mr. Bourdon (19.ª edicion) se hallan los cálculos relativos á la determinacion del número π con todos los pormenores necesarios.

NÚMERO DE LADOS.	APOTEMAS.	RADIOS.
4..........	$r\ =0,5000008$	$R\ =0,7071068$
8..........	$r_1=0,6035534$	$R_1=0,6532815$
16..........	$r_2=0,6284174$	$R_2=0,6407289$
32..........	$r_3=0,6345731$	$R_3=0,6376435$
64..........	$r_4=0,6361083$	$R_4=0,6368754$
128..........	$r_5=0,6364919$	$R_5=0,6366836$
256..........	$r_6=0,6365878$	$R_6=0,6366357$
512..........	$r_7=0,6366117$	$R_7=0,6366237$
1024..........	$r_8=0,6366117$	$R_8=0,6366207$
2048..........	$r_9=0,6366192$	$R_9=0,6366199$
4096..........	$r_{10}=0,6366195$	$R_{10}=0,6366197$
8192..........	$r_{11}=0,6366196$	$R_{11}=0,6366196$

Se ve por esta tabla que los valores de r_{11} y R_{11} no difieren en las siete primeras cifras decimales.

Así pues, una circunferencia igual á 4 tiene por radio 0,6366196..., y por diámetro 1,2732392....., de donde resulta que la relacion de diámetro á la circunferencia es $\frac{1,2732392.....}{4}$, ó 0,3183098; y el número π, ó la relacion de la circunferencia al diámetro, tiene por valor

$$\frac{1}{0,3183098.....} \quad \text{ó sea} \quad 3,141593.....$$

Esta division da el valor de π, faltándole menos de una unidad del sesto órden decimal; y si se quiere mayor aproximacion será necesario calcular de antemano los valores de R, R_1, R_2..... y de r, r_1, r_2.... con mayor número de cifras.

LIBRO QUINTO.

CAPÍTULO PRIMERO.

Teorema XII.

379*. *El área de un círculo es igual al producto que resulta de multiplicar la circunferencia por la mitad del radio; de modo que* circ.º R = circunf.ª R × ½R.

Si se circunscribe á este círculo un polígono regular de cualquier número de lados, llamando A al área de este polígono y P al perímetro, se tendrá la ecuacion $A = P.\frac{1}{2}R$.

Circunscribiendo al círculo otros polígonos regulares que tengan cada vez mayor número de lados, variarán simultáneamente los valores de A y P, pero siempre subsistirá la igualdad anterior. El área de cada polígono circunscripto se va acercando á la del círculo á medida que se aumenta el número de los lados de su perímetro, y este perímetro se va tambien acercando al mismo tiempo á la circunferencia del círculo; sin embargo, hasta que el número de lados de dicho perímetro sea infinito, ni el perímetro se confunde con la circunferencia, ni el área del polígono con la del círculo: por consiguiente, puede mirarse esta última como el límite de las de los polígonos, y la circunferencia como el límite de los perímetros de estos. Pero si dos cantidades variables se conservan iguales en todos los momentos de su variacion, sus límites tambien son iguales; luego

$$\text{lím. } A = \text{lím. } P \times \tfrac{1}{2}R$$

ó sea

$$\text{círc.}^{\text{o}}\ R = \text{circunf.}^{\text{a}}\ R \times \tfrac{1}{2}R.$$

Si alguna duda quedase de que circunf.ª $R \times \frac{1}{2}R$ es el límite hácia el cual tiende el producto $P \times \frac{1}{2}R$, se tendrá presente que P = circunferencia $R + \alpha$, siendo α una cantidad variable que va decreciendo indefinidamente, segun aumenta el número de lados de P; por consiguiente,

$$P.\tfrac{1}{2}R = \text{circunf.}^{\text{a}}\ R \times \tfrac{1}{2}R + \frac{\alpha R}{2},$$

y como α tiende hácia cero á medida que aumenta el número de lados de P, se deduce que

$$\text{lím. } P \times \tfrac{1}{2}R = \text{lím. } \left(\text{circunf.}^{\text{a}}\ R \times \tfrac{1}{2}R + \frac{\alpha R}{2}\right) = \text{circunf.}^{\text{a}}\ R \times \tfrac{1}{2}R.$$

LIBRO NOVENO.

CAPÍTULO PRIMERO.

Teorema II.

647 *. *El área de la superficie curva de un cono circular recto es igual á la mitad del producto que se obtiene multiplicando la circunferencia de su base por la generatriz;* es decir, que

$$C = \tfrac{1}{2}\,\text{circunf.}^a\, R \times G,$$

llamando C á dicha superficie curva, G á la generatriz y R al radio de la base.

Considérese que el cono ha sido engendrado por la revolucion del triángulo rectángulo VOK (fig. 338) alrededor de VO, y que se le han inscripto y circunscripto dos pirámides regulares VABC..... y VA′B′C′..... de bases semejantes. Llamando S y s á las respectivas áreas laterales de estas dos pirámides, g á la apotema VI de la primera, y P y p á los perímetros de sus bases, tendrémos (645) las dos igualdades

$$S = \tfrac{1}{2}P.G \quad \text{y} \quad s = \tfrac{1}{2}p.g,$$

que divididas ordenadamente dan

$$\frac{S}{s} = \frac{P}{p}.\frac{G}{g}.$$

Inscribiendo y circunscribiendo al mismo cono otras pirámides regulares, pero cuyas bases, conservándose siempre semejantes, vayan teniendo cada vez duplo número de lados, variarán las cantidades que entran en las tres ecuaciones anteriores, escepto G que es la generatriz del cono; pero siempre subsistirá la igualdad entre el primero y segundo miembro de cada una de dichas tres ecuaciones. Segun ya sabemos (351, *nota* 2.ª), haciendo suficientemente grande el número de lados de las bases, se puede conseguir que la diferencia entre P y p llegue á ser menor que cualquiera cantidad dada por pequeña que esta sea: lo mismo sucede con la diferencia entre G y g, pues $G-g = VK - VI < KI$, que tiene cero por límite. En virtud de todo esto el límite del segundo miembro de la ecuacion $\frac{S}{s} = \frac{P}{p}.\frac{G}{g}$, y por consiguiente el del primero es la unidad; luego *la diferencia entre* S *y* s *puede llegar á ser menor que cualquiera cantidad dada por pequeña que sea.* Si alguna duda quedase de esto, llamemos δ á la diferencia entre S y s, y dividiendo por s los dos miembros de la igualdad $S - s = \delta$, hallarémos $\frac{S}{s} - 1 = \frac{\delta}{s}$; y habiendo demostrado que el límite de $\frac{S}{s}$ es la unidad, el del primer miembro de esta última igualdad tiene que ser cero; y como forzosamente ha de ser el mismo el del segundo miembro, es preciso que δ tenga por límite cero, pues s es una cantidad finita.

Ahora bien, el área del cono está comprendida entre S y s; pues prolongando el eje VO una cantidad OV'=VO, y tomando el punto V' por vértice de un cono y de dos pirámides que tengan respectivamente por bases las del cono y pirámides de que nos veníamos ocupando, se verá claramente que la superficie 2S es mayor que la doble superficie cónica, porque la envuelve completamente; y que, por la misma razon, la doble superficie cónica es mayor que la $2s$: luego la doble superficie cónica está comprendida entre las 2S y $2s$, y como en la misma relacion han de estar sus mitades, la superficie lateral del cono está comprendida entre S y s, y es su límite comun. Por lo tanto, siendo

$$S=\tfrac{1}{2}P.G,$$

y sabiendo que los límites de dos cantidades variables, que se conservan iguales en todos los momentos de su variacion, son tambien iguales, se podrá establecer la igualdad

$$C=\tfrac{1}{2}.\text{circunf.}^{a}\,R\times G.$$

Teorema V.

651 *. *El área de la superficie curva de un cilindro cualquiera de base circular es igual al producto que se obtiene multiplicando el perímetro de su seccion recta por la generatriz.*

Supóngase que en el círculo que sirve de base al cilindro se hallen inscriptos y circunscriptos dos polígonos regulares semejantes, y que estos sirvan de bases á dos prismas que el primero quedaria inscripto y el segundo circunscripto al cilindro. Si conseguimos demostrar que la superficie lateral del cilindro es mayor que la de cualquiera de los prismas así inscriptos, y menor que la de cualquiera circunscripto, repitiendo las consideraciones del n.° 647 * llegarémos á la espresion del área que se busca. Para conseguirlo,

1.° Sea ABCD (fig. 339) una de las caras laterales del prisma inscripto, y AEBDFC el huso esférico correspondiente á esta cara: si la superficie de esta no es menor que la del huso, será mayor ó igual. Supongamos que ABCD>AEBDFC, y que sea M el esceso de la primera sobre la segunda: tomando en la prolongacion del eje GI una longitud GO igual á n veces GI, y tirando por el estremo O de esta prolongacion un plano paralelo á las bases, es claro que el huso AEBKML será n veces mayor que el AEBDFC, y el rectángulo AK n veces mayor que el AD; luego la diferencia entre el rectángulo AK y el huso AEBKLM será n veces M. Como n es un número entero elegido arbitrariamente y M una área dada, podemos elegir n de tal modo que el producto nM sea mayor que la suma de los dos segmentos de círculo AEBA y KLMK, y de este modo podrémos establecer la desigualdad

$$\mathrm{ABKL}-\mathrm{AEBKML}>\mathrm{AEBA}+\mathrm{KMLK},$$

de la que se deduce que

$$\mathrm{ABKL}>\mathrm{AEBKML}+\mathrm{AEBA}+\mathrm{KMLK};$$

es decir, que la superficie plana ABKL es mayor que la formada por el huso cilíndrico AEBKML y los segmentos circulares AEBA y KLMK; pero como esta termina en el mismo contorno que aquella, es absurda la última desigualdad, y por consiguiente el supuesto que nos ha conducido á ella; luego no puede ser ABCD>AEBDFC.

Supongamos que ABDC=AEBDFC. Tirando las cuerdas AE y EB, DF y FC, los tres rectángulos AF, ED y AD tendrán la misma altura, y como la suma de las bases de los dos primeros es mayor que la base del tercero, la suma de las superficies de dichos dos primeros rectángulos es mayor que la del tercero, y por consiguiente, mayor tambien que el área del huso AEBDFC, y en su consecuencia el rectángulo AF será mayor que la mitad de AEBDFC; es decir, mayor que el huso cilíndrico á que está subtendiendo, lo cual es contrario á lo demostrado antes.

Queda, pues, probado que el rectángulo ABCD no puede ser igual al huso AEBDFC ni mayor que él; luego será menor, y como lo mismo sucede á todas las caras laterales del prisma, resulta que la superficie lateral de este es menor que la curva del cilindro circunscripto.

2.° Por el contrario, la superficie lateral del prisma circunscripto al cilindro es mayor que la superficie curva de este. Para demostrarlo, bastará con hacer ver que el área del rectángulo A′B′D′C′ es mayor que la del huso AEBDFC, y lo conseguirémos por un razonamiento semejante al anterior, pues si A′B′D′C′<AEBDFC, repitiendo estas dos superficies un número suficiente de veces, se podrá hacer que

$$AEBKML - A'B'K'L' > 4AEA'A,$$

y por consiguiente, que

$$AEBKML > A'B'K'L' + AEA'A + BEB'B + KMK'K + LML'L,$$

lo que está en oposicion con lo demostrado en el n.° 646, *nota;* luego no es posible que A'B'D'C' sea menor que AEBDFC.

Tampoco lo es que $A'B'D'C' = AEBDFC$; porque tirando por A una tangente al arco AEB, haciendo pasar un plano por esta recta y por AC y fundándonos en que la quebrada $ANE < A'E$, llegarémos á probar que el rectángulo ANPC habria de ser menor que el huso cilíndrico correspondiente; y siendo esto contrario á lo que antes hemos demostrado, no es posible tampoco que $A'B'D'C' = AEBDFC$.

En virtud de todo lo dicho no puede caber duda de que la superficie lateral de cualquier prisma inscripto en un cilindro es menor que la superficie curva del cilindro, y esta menor que la lateral de todo prisma circunscripto al mismo; por consiguiente, y teniendo tambien en cuenta la *nota* del n.° 646, duplicando continuamente el número de lados de los polígonos inscriptos y circunscriptos al círculo que sirve de base al cilindro, las áreas laterales de los prismas inscriptos y circunscriptos se irán aproximando indefinidamente á la superficie curva del cilindro, sin que jamás puedan llegar á ser iguales con ella hasta que el número de lados de los polígonos que les sirven de bases sea infinito. Así es que el área de la superficie curva del cilindro es el límite de las superficies laterales de los prismas inscriptos y tambien de los circunscriptos. Por lo tanto, llamando S al área de la superficie lateral de un prisma circunscripto, P al perímetro de su seccion recta y G á cualquiera de sus aristas, y C, P' y G á la superficie curva, perímetro de la seccion recta, y generatriz del cilindro, tendrémos (649) que en la igualdad $S = P.G$ las cantidades S y P tienden sucesivamente hácia C y P' que son respectivamente sus límites, y como G es constante, tendrémos que

$$C = P'.G.$$

Si alguna duda quedase de que el límite de $P.G$ es $P'.G$, recordarémos (351, *nota* 1ª.) que

$$P = P' + \alpha;$$

siendo α una cantidad que puede decrecer indefinidamente; por consiguiente,

$$P.G=P'.G+\alpha.G.$$

Pero cuando el número de lados de la base del prisma sea infinitamente grande, α, y por consiguiente $\alpha.G$ será infinitamente pequeño; luego el límite de $P.G$ es $P'.G$.

Teorema IX.

655 *. *El área de un casquete esférico es igual al producto que resulta de multiplicar la circunferencia de un círculo máximo por la altura del casquete;* de modo que llamando C y h al área y altura del casquete y R al radio de un círculo máximo, se verifica la igualdad

$$C=2\pi Rh.$$

Considérese que el casquete ha sido engendrado por la revolucion del arco AB (fig. 340) girando alrededor del diámetro AG. Si se inscribe en este arco una línea quebrada regular ADEFB y se circunscribe otra de igual clase y número de lados A'D'E'F'B', y se considera que giren al mismo tiempo que el arco y alrededor del mismo eje, y se representan por A y A' las áreas de las superficies de revolucion engendradas por estas líneas, por r la apotema OI de la primera, por h la proyeccion AC de la misma, y por h' la A'C' de la segunda sobre el eje, se podrá establecer (654) las igualdades

$$A'=2\pi Rh', \quad A=2\pi rh,$$

que divididas ordenadamente, producen esta otra

$$\frac{A'}{A}=\frac{R}{r}.\frac{h'}{h}.$$

Inscribiendo y circunscribiendo al arco AB líneas quebradas regulares que vayan teniendo cada vez mayor número de lados, pero tantos la inscripta como la circunscripta, y suponiendo que todas giran alrededor de AG, irán variando las cantidades que entran en estas tres ecuaciones, á escepcion de R que permanece constante por ser el radio del arco AB; pero siempre se verificarán dichas ecuaciones. Sabemos (351, *nota* 2.ª) que haciendo suficientemente grande el número de lados de las líneas quebradas inscripta y circunscripta, se puede conseguir que R y r se diferencien en menos que cualquiera cantidad dada por pequeña que sea: lo mismo sucede con h' y h, pues $h'-h=A'C'-AC=A'A+C'C=BB'+BB''$, y como

$$BB'=OB'-OM<B'M$$

que puede ser menor que cualquiera cantidad dada, y $BB''<BB'$, porque la primera es perpendicular, y la segunda oblícua á B'C', resulta que el límite de la suma $BB'+BB''$ es cero. En virtud de todo esto, el límite del segundo miembro de la ecuacion $\frac{A'}{A}=\frac{R}{r}\cdot\frac{h'}{h}$, y por consiguiente, el del primero es la unidad; luego *la diferencia entre* A' *y* A *puede llegar á ser menor que cualquiera cantidad dada por pequeña que sea.*

Vamos ahora á demostrar que el área del casquete esférico está comprendida entre A' y A. Con efecto, es mayor que A, porque el casquete y A descansan sobre un mismo contorno (646, *nota*), que es la circunferencia engendrada por BC, y A es convexa: es menor que A', porque tirando en B la tangente BK, la superficie engendrada por A'D'E'F'KB es mayor que el casquete (646, *nota*), y menor que A', pues A' y la engendrada por A'D'E'F'KB tienen comun la parte engendrada por la revolucion de la línea quebrada A'D'E'F'K, y se diferencian en las áreas de los troncos de cono engendrados por KB y KB' que son respectivamente iguales á $\pi(KL+BC).KB$ y á $\pi(KL+B'C').KB'$; y como la comparacion de los triángulos OBC y OB'C' hace ver que $BC<B'C'$, y además $KB<KB'$ (53), resulta que $\pi(KL+BC).KB<\pi(KL+B'C').KB'$; luego la superficie producida por la rotacion de A'D'E'F'B' es mayor que la producida por la de A'D'E'F'KB, que á su vez es mayor que la del casquete. Por consiguiente, la del casquete está comprendida entre A' y A, y es límite comun de estas dos.

Demostrado esto, y recordando que si dos cantidades variables permanecen iguales en todos los momentos de su variacion, sus límites son tambien iguales, podemos deducir de la igualdad $A'=2\pi Rh'$, que tambien ha de ser

$$C=2\pi Rh,$$

que es lo que queríamos demostrar.

658 *. Corolario III *. *El área de la esfera es igual al producto*

que resulta de multiplicar por el diámetro la circunferencia de un círculo máximo.

La superficie esférica está engendrada por la rotacion de la semicircunferencia AEG alrededor de AG, pero tirando el radio OE puede tambien decirse que es la suma de los casquetes engendrados por los arcos ADE y EBG. Llamando a al área del primero y a' á la del segundo, serán (655 *)

$$a = \text{circunf.}^{a}\ R \times AN,$$
$$a' = \text{circunf.}^{a}\ R \times NG;$$

luego

$$\text{área esfera} = a + a' = \text{circunf.}^{a}\ R\,(AN + NG) = \text{circunf.}^{a}\ R \times AG.$$

LIBRO DÉCIMO.

CAPÍTULO PRIMERO.

TEOREMA X.

684 *. *El volúmen de un cilindro cualquiera tiene por medida el producto de su base por su altura;* de modo que en el caso de ser la base circular, llamando C al volúmen, h á la altura y R al radio de la base, se verifica la igualdad

$$C = \pi R^2 h.$$

Inscribiendo y circunscribiendo al cilindro propuesto dos prismas regulares, cuyas bases sean semejantes, y llamando V y v á sus volúmenes, y B y b á las áreas de sus bases, tendrémos

$$V = Bh \quad \text{y} \quad v = bh,$$

y dividiendo ordenadamente

$$\frac{V}{v} = \frac{B}{b}.$$

Si al mismo cilindro se van inscribiendo y circunscribiendo otros prismas regulares semejantes, cuyas bases vayan teniendo cada vez mayor número de lados, variarán las cantidades que entran en las anteriores igualdades, escepto h que permanecerá constante; pero siempre se verificarán dichas igualdades. Como el número de lados de las bases puede llegar á ser suficientemente grande para que B y b se diferencien en menos de cualquiera cantidad dada por pequeña que sea, el límite del segundo miembro, y por consiguiente el del primero de la ecuacion $\frac{V}{v}=\frac{B}{b}$ es la unidad; es decir, que haciendo el número de lados de las bases tan grande como sea necesario, *se podrá hacer que* v *se diferencie de* V *en menos que cualquiera cantidad dada por pequeña que sea.* Ahora bien; el volúmen del cilindro está evidentemente comprendido entre V y v, y es su límite comun; el círculo que sirve de base al cilindro es límite de B y b; luego teniendo presente que si dos cantidades variables se conservan iguales en todos los momentos de su variacion, sus límites son tambien iguales, se podrá establecer la igualdad

$$C=\pi R^2h.$$

Teorema XI.

686 *. *Dos tetráedros* VABC *y* vabc (fig. 341) *que tienen bases* ABC *y* abc *equivalentes y alturas* VO *y* vo *iguales, son equivalentes.*

Si no lo fuesen, y el volúmen del primero fuera mayor que el del segundo, se podria construir sobre ABC un prisma cuyo volúmen fuera la diferencia entre los de VABC y *vabc*, pues (682) no habria mas que dividir esta diferencia por la mitad del área del triángulo ABC para tener la altura OG de dicho prisma. Bajo este supuesto divídase la altura VO en partes iguales y menor cada una que OG; de modo que uno por lo menos de los puntos de division caiga entre O y G. Colóquense los dos tetráedros sobre un mismo plano, y por los puntos de division I, K, L de la altura tírense otros paralelos á aquel, que dividirán á los dos tetráedros en troncos de igual altura, y de bases equivalentes una por una (601). Hágase pasar por cada uno de los lados BC, B′C′, B″C″, B‴C‴ planos BE′, B′E″, B″E‴, B‴E$^{\text{IV}}$ paralelos á la arista VA, y por los $b'c'$, $b''c''$, $b'''c'''$ otros $b'e$, $b''e'$, $b'''e''$ que lo sean á va; y tírese tambien por el vértice V un plano paralelo á ABC: de este modo quedarán formadas dos séries de prismas, mayores los de la una, y los de la otra menores que los troncos piramidales correspondientes, y la diferencia entre la suma de los prismas circunscriptos á los troncos del primer tetráedro y la de los inscriptos en los del segundo será mayor que la diferencia de los dos tetráedros. Pero estas sumas de prismas se diferencian en el ABCE′, porque cada uno de los demás prismas circunscriptos equivale respectivamente á uno de los inscriptos por tener la misma altura y base equivalente; luego si la diferencia entre la suma de los circunscriptos y la de los inscriptos ha de ser mayor que la de los tetráedros, el prisma ABCE′ tendrá que ser mayor que el que tiene por base ABC y por altura OG, lo que es imposible por tener los dos prismas la misma base y desiguales las alturas OI y OG. Como hemos llegado á una consecuencia absurda, tambien lo es el supuesto de que habiamos partido; es decir, que no fuesen equivalentes los tetráedros.

Teorema XIII.

692 *. ***El volúmen de un cono cualquiera tiene por medida el tercio del producto de su base por su altura.***

Repítase la demostracion del n.° **684 ***.

Teorema XVIII.

701 *. ***El volúmen de un sector esférico tiene por medida el producto que resulta de multiplicar el área del casquete que le sirve de base por el tercio del radio;*** de modo que llamando V al volúmen, R al radio del sector y C al área del casquete, se verifica

$$V=\tfrac{1}{3}C.R.$$

Considerando que el sector esférico ha sido engendrado por la revolucion del circular AEBO (fig. 340) alrededor del radio AO, inscribiendo y circunscribiendo al arco AB dos líneas quebradas regulares de igual número de lados ADEFB y A′D′E′F′B′; suponiendo que los sectores poligonales OADEFB y OA′D′E′F′B′ giran al mismo tiempo que el circular, y llamando v al volúmen engendrado por el sector inscripto, y v' al que lo sea por el circunscripto, a al área de la superficie de revolucion engendrada por ADEFB, y A á la que lo es por A′D′E′F′B′, y por r la apotema de la primera, se podran establecer las dos igualdades

$$v'=\tfrac{1}{3}AR \quad \text{y} \quad v=\tfrac{1}{3}ar,$$

que divididas ordenadamente, y sustituyendo en vez de A y a sus valores respectivos (**654**), resulta esta otra

$$\frac{v'}{v}=\frac{A}{a}\cdot\frac{R}{r}=\frac{R^2}{r^2}\cdot\frac{A'C'}{AC}.$$

Inscribiendo en el arco AEB y circunscribiendo al mismo líneas quebradas regulares y semejantes que vayan teniendo cada vez mayor número de lados, irán variando todas las cantidades que entran en las tres ecuaciones anteriores, escepto R, pero siempre se verificarán las ecuaciones. Como el número de lados de estas líneas puede tomarse tan grande como sea necesario para que R y r se diferencien en menos que cualquiera cantidad dada por pequeña que sea, y en este caso A′C′ y AC tambien se diferencian en tan poco como se quiera (351, *nota* 2.ª, y 351 *), resulta que el límite del segundo miembro de la tercera ecuacion, y por consiguiente el del primero, es la unidad. Esto equivale á decir *que* v *puede acercarse á* v′ *tanto como se quiera;* y como el volúmen del sector esférico está evidentemente comprendido entre ellos, es el límite comun de ambos: por otra parte, el área del casquete esférico es límite comun de a y a' (655 *); y como sabemos que si dos cantidades variables se conservan iguales en todos los momentos de su variacion, sus límites son tambien iguales, una vez que la igualdad $v'=\frac{1}{3}\text{AR}$ es cierta siempre, tambien lo será la siguiente:

$$\text{lím. } v'=\text{lím. } \tfrac{1}{3}\text{AR},$$

ó sea

$$\text{V}=\tfrac{1}{3}\text{CR}.$$

Teorema XIX.

702 *. *El volúmen de la esfera tiene por medida el producto que resulta de multiplicar el área de la superficie esférica por el tercio del radio.*

El volúmen de la esfera está engendrado por la revolucion del semi-círculo ABG alrededor del diámetro AG; pero tirando el radio OE, tambien puede decirse que es la suma de los volúmenes engendrados por los sectores circulares AOE y EOG, y como el primero tiene por espresion el producto del área engendrada por ADE multiplicada por $\frac{1}{3}$AO, y el segundo el que resulte de multiplicar por $\frac{1}{3}$AO el área engendrada por EBG, resulta que

$$\text{V}=\tfrac{1}{3}\text{AO}\,(\text{área ADE}+\text{área EBG})=\tfrac{1}{3}\text{AO}\times\text{área superficie esférica}.$$

APÉNDICE TERCERO.

En la edicion francesa nada se dice de la hipérbola; pero en atencion á que los programas de exámen de varias carreras facultativas exigen algunas nociones sobre esta curva, me ha parecido conveniente esponer aquí lo mas principal de su teoría, sin pasar de los límites de la geometría elemental, y arreglándome lo mas posible al método con que el autor ha espuesto las de la elipse y parábola.

Teoría de la hipérbola.

877. *La* HIPÉRBOLA *es una curva plana en que la diferencia de las distancias de cada uno de sus puntos á otros dos fijos es constantemente igual á una recta dada* 2a.

En virtud de esta definicion, si M, M′, M″... son (fig. 342) varios puntos de la curva, y F y F′ los fijos, se verificará que

$$FM - F'M = FM' - F'M' = FM'' - F'M'' = \ldots = 2a.$$

878. Los puntos fijos F y F′ se llaman los *focus* de la hipérbola, y las rectas que desde estos van á un mismo punto de la curva, como las FM, F′M, *radios vectores.*

La misma definicion de la hipérbola da un medio para resolver el siguiente

Problema I.

879. *Describir una hipérbola conociendo la diferencia* 2a *de los radios vectores y la distancia* FF′ *que separa á los dos focus.*

1.° *Construccion de la hipérbola por puntos.* Suponiendo que sean F y F′ (fig. 342) los dos focus, los unirémos por medio de una recta indefinida XY; en el punto O medio de la distancia FF′ levantarémos la UZ perpendicular á XY. Hecho esto, tomarémos desde O á derecha é izquierda, y sobre XY las distancias $OA = OB = a$, y tendrémos dos puntos A y B pertenecientes á la curva, porque

$$FA - F'A = FB + AB - F'A = AB = 2a,$$

y

$$F'B - FB = F'A + AB - FB = AB = 2a.$$

Para obtener otro punto M de la curva, observarémos que la condicion $F'M - FM = 2a$ da esta otra

$$F'M = 2a + FM,$$

igualdad que hace ver que por cada valor que se dé á FM resulta otro para F'M. En su consecuencia, haciendo centro en F con un radio cualquiera FM mayor que FB, trazarémos un arco de círculo, y haciendo despues centro en F' con otro radio igual á la suma de $2a$ y de la longitud que hayamos dado á FM, trazarémos otro arco que cortará al primero en dos puntos (104) M, M' simétricos (501, *nota*) respecto de XY, y que pertenecerán á la curva, pues $F'M - FM = 2a + FM - FM = 2a$. Cambiando ahora de centros, es decir, describiendo un arco desde F' con el radio FM, y otro desde el F con un radio igual á $2a + FM$, se determinarán otros dos puntos M'', M''', simétricos respecto á XY, y simétricos con los M y M' respecto á la recta UZ.

La igualdad $F'M = 2a + FM$ hace ver que, dando á FM valores crecientes desde FB hasta el infinito, resultarán para F'M otros crecientes desde $2a + FB$ hasta el infinito; y como estos son los radios de los arcos que trazamos haciendo centro primero en F y F' y luego en F' y F con los mismos radios cambiados, resulta que esta curva se compone de dos ramas infinitas, una que á partir de B se estiende á la derecha de UZ alejándose indefinidamente de esta recta y de la XY, y otra que partiendo de A se va continuamente alejando de ZU y de XY, quedando estas dos ramas simétricas respecto á XY y á UZ.

Las rectas XY y UZ se llaman los *ejes de simetría*, y el punto O el *centro de simetría* de la hipérbola. De la construccion que acabamos de esplicar se deduce que el XY corta á la curva en dos puntos A y B, y que el UZ no la corta; por esta razon al primero, ó mas bien á su parte AB, se llama *eje real*, y al ZU *eje imaginario* de la hipérbola : tambien se llama *eje transverso* ó *primer eje* al AB, y en este caso el segundo se denomina *eje no transverso* ó *segundo eje* Los puntos A y B son los vértices de la hipérbola.

2.° *Construccion de la hipérbola por un movimiento continuo.* Fíjese en el focus F' (fig. 343) una regla F'E que pueda girar alrededor de este punto, y pónganse en el punto E y en el otro focus F los estremos de un hilo que tenga una longitud tal que $F'E - FE$ sea igual al eje transverso AB; hágase resbalar un lápiz sobre ese hilo, de modo que vaya aplicando una parte de él sobre el canto de la regla, y la punta de este lápiz irá describiendo en su movimiento un arco de la hipérbola.

Invirtiendo la posicion de la regla se podrá describir otro arco de hipérbola por la parte inferior del eje transverso, arco simétrico con el anterior respecto á este mismo eje; por último, colocando la regla en el focus F y los estremos del hilo en F′ y E, se describirán otros dos arcos simétricos con los anteriores respecto al eje no transverso. Bien se comprende que los arcos descriptos por este medio tienen que ser sumamente cortos.

TEOREMA I.

880. *Para todo punto esterior á la hipérbola se verifica que la diferencia de sus distancias á los dos focus es menor que $2a$* (fig. 342).

Sea N un punto esterior á la hipérbola, y que supondrémos colocado á la derecha de ZU; uniéndole con los focus F y F′, lo mismo que el de interseccion M de FN con la curva, resultará un triángulo F′MN, en que se verificará la desigualdad

$$F'N < F'M + MN,$$

y restando de ambos miembros ordenadamente los de la igualdad

$$FN = FM + MN,$$

se tendrá

$$F'N - FN < F'M - FM = 2a.$$

Si el punto que se considera fuese el N′ colocado á la izquierda de ZU, haciendo una construccion análoga á la precedente, se tendria

$$FN' < FM'' + M''N',$$

y restando ordenadamente la igualdad

$$F'N' = F'M'' + M''N',$$

se hallaria

$$FN' - F'N' < FM'' - F'M'' = 2a:$$

luego queda demostrada la propiedad, cualquiera que sea la posicion del punto esterior á la hipérbola

TEOREMA II.

881. *Para todo punto interior á la hipérbola se verifica que la diferencia de sus distancias á los focus es mayor que* 2a (fig. 342).

Sea N″ un punto interior á la curva, y supongamos que esté colocado á la derecha de ZU; uniéndole con F y F′, y estos con el M en que F′N″ corta á la hipérbola, tendrémos

$$F'N''=F'M+MN'',$$

$$FN''<MN''+FM,$$

y restando ordenadamente

$$F'N''-FN''>F'M-FM=2a.$$

Si el punto fuese el N‴, tendriamos

$$FN'''=FM''+M''N''',$$

$$F'N'''<F'M''+M''N''',$$

y restando quedaria

$$FN'''-F'N'''>FM''-F'M''=2a.$$

Vemos, por consiguiente, que esta propiedad se verifica, cualquiera que sea la posicion del punto interior á la hipérbola.

COROLARIO. *Los puntos de la hipérbola son los únicos de su plano cuyas distancias á los focus se diferencian en* 2a.

TEOREMA III.

882. *El punto de interseccion* O *de los dos ejes es centro* (203) *de la hipérbola* (fig. 344).

Quedará demostrado si hacemos ver que prolongando MO en una cantidad OM‴=MO, el punto M‴ pertenece á la hipérbola. Para conseguirlo tendrémos presente que los triángulos FMO y F′M‴O son iguales, y que tambien lo son los F′MO y FOM‴ (181), de lo que resulta que

$$FM'''-F'M'''=F'M-FM=2a;$$

ó lo que es lo mismo, que el punto M‴ pertenece á la hipérbola (corolario anterior).

TEOREMA IV.

883. *La tangente á la hipérbola en un punto cualquiera* M *divide en dos partes iguales el ángulo formado por los dos radios vectores* F′M, FM *pertenecientes al punto de contacto* (fig. 344).

Divídase en dos partes iguales el ángulo F′MF, y demostrando que de todos los puntos de la bisectriz solamente el M pertenece á la hipérbola, quedará demostrado el teorema.

Para conseguirlo, sea N otro punto de la bisectriz; tomando en MF′ una parte MG = MF, y tirando las rectas FG, NF, NF′ y NG, se tendrá en virtud de la construccion

$$FI = IG\ (181), \quad NF = NG, \quad MF = MG,$$

por consiguiente,

$$MF' - MG = 2a.$$

Además el triángulo NF′G da

$$NF' - NG < F'G,$$

y por consiguiente

$$NF' - NF < 2a;$$

es decir, que el punto N está fuera de la hipérbola (880).

De aquí se deducen los siguientes

PROBLEMA II.

884. *Tirar una tangente á la hipérbola por uno* M *de sus puntos.*

Trácense (fig. 344) los radios vectores FM y F′M correspondientes al punto dado M; divídase en dos partes iguales el ángulo F′MF, y la bisectriz MT será la tangente pedida.

PROBLEMA III.

885. *Tirar una tangente á la hipérbola por un punto* N *esterior á la curva* (fig. 345).

Haciendo centro en el punto N con el radio NF, descríbase un arco de círculo que corte en dos puntos G, G′ á la circunferencia descripta desde el focus F′ con el radio $2a$; tírense las rectas F′G, F′G′, y prolónguense hasta que encuentren á la curva en M, m, y tirando las rectas NM, Nm, se tendrán las dos tangentes que desde el punto N se pueden tirar á la curva.

ESCOLIO. Se probaria fácilmente, como ya se ha hecho en la elipse, que el problema seria imposible si el punto desde el cual se quiere tirar la tangente fuese interior á la curva.

TEOREMA V.

886. *El lugar geométrico de las proyecciones de los focus sobre las tangentes levantadas en los diferentes puntos de la hipérbola es la circunferencia trazada con el radio* a *desde el centro* O (fig. 346).

Siendo la tangente en un punto cualquiera de la hipérbola bisectriz del ángulo F′MF formado por los dos radios vectores tirados al punto M de contacto (883), tomando sobre MF′ la distancia MK = MF, y uniendo K con F, será la tangente MT perpendicular en el medio de KF (181). En su consecuencia, uniendo O, que es el medio de FF′, con P, que lo es de KF, la OP será mitad de F′K, y como

$$F'K = F'M - MK = 2a + FM - MK = 2a$$

será

$$OP = a.$$

Esto hace ver que la distancia á que el punto P, proyeccion del focus F sobre la tangente MT, se halla del centro O de la hipérbola, es constante é igual á la mitad del eje transverso; luego las proyecciones del focus F sobre cualquier tangente tirada á la rama derecha de la hipérbola se hallan en la circunferencia descripta desde O con el radio a; y como haciendo una construccion análoga para cualquier tangente tirada á la rama izquierda, se llegaria á demostrar que la proyeccion del focus F′ sobre ella se halla en la misma circunferencia, queda demostrado el teorema.

Se llama NORMAL *á la hipérbola la perpendicular levantada á la tangente en el punto de contacto*. De que la tangente divide en dos partes iguales el ángulo formado por los dos radios vectores, se deduce que la normal es bisectriz del que forman uno de los radios y la prolongacion del otro. La definicion da un medio, y esta consecuencia otro, para trazar la normal á la hipérbola en uno cualquiera de sus puntos.

APÉNDICE CUARTO.

Secciones cónicas y cilíndricas.

887. Segun las diferentes posiciones que ocupe un plano respecto á las generatrices rectilíneas de una superficie cónica circular recta, así tambien son diferentes las secciones que aquel puede causar en esta.

888. Es evidente que si el plano pasa por el centro V de la superficie (fig. 347), sin tener ningun otro punto comun con las generatrices, ó hay que decir que el plano que esté colocado de este modo no corta á la superficie cónica, ó hay que admitir que la seccion es un punto.

889. Si el plano pasa por el centro y por la tangente levantada en un punto cualquiera de la base, toca á la superficie cónica en todo el largo de la generatriz que une el centro V con el punto T de contacto de la tangente á la base (535).

890. Si este plano girase alrededor de VT, contendria, además de esta generatriz, la correspondiente al punto L en que cortase á la directriz (534).

891. Vemos, por consiguiente, que un plano tirado por el centro de una superficie cónica puede cortar á esta en un punto, en dos generatrices, ó tener con ella una sola recta comun.

892. Si el plano secante no pasa por el centro de la superficie cónica circular recta, puede suceder que corte á todas las generatrices, ó que sea paralelo á una de ellas; y el primer caso debe dividirse en dos, segun que las corte á todas á un mismo lado del centro, ó que á unas corte en la hoja superior y á otras en la inferior de la superficie. Segun estas posiciones diferentes del plano secante, resultarán tres clases de secciones, y vamos á demostrar que son precisamente las tres curvas de que ya nos hemos ocupado antes, elipse, hipérbola ó parábola, que por esta causa han recibido el nombre de *secciones cónicas*.

Teorema I.

893. ***La seccion causada en una superficie cónica circular recta por un plano que corte á todas las generatrices á un mismo lado del centro, es una elipse.***

Sea AMBM′ (fig. 347) la seccion; tírese por el eje VO otro plano VAB perpendicular al secante, y resultará un triángulo VAB formado por la interseccion AB de estos dos planos y por las generatrices VA y VB. Inscribiendo una circunferencia en este triángulo, otra en la línea quebrada que forman BA y las prolongaciones de VA y VB, y suponiendo que estas giren alrededor de VO al mismo tiempo que las generatrices VB y VA, se formarán dos esferas inscriptas en la superficie cónica engendrada en este movimiento por la generatriz VB ó por la VA. Supongamos que sean F y F′ los puntos en que las circunferencias inscriptas tocaban á BA, puntos que serán tambien los de contacto de las esferas con el plano secante; y sean ab y $a'b'$ las circunferencias en que estas esferas tocan á la superficie cónica, circunferencias que tendrán sus planos perpendiculares al eje. Tomando un punto cualquiera M en el perímetro de la seccion AMBM′, uniéndole con los F y F′, y tirando la generatriz VM, resultarán las rectas MF y MK tangentes á la esfera que toca en F al plano de la seccion; y las MF′ y MK′ tangentes á la que toca en F′ al mismo plano. Como las tangentes tiradas á una esfera desde un mismo punto son iguales, tendrémos las igualdades

$$MF = MK, \quad MF' = MK',$$

que sumadas ordenadamente, dan por resultado

$$MF + MF' = KK' = aa' = bb'.$$

Además, por ser a y a' los puntos de contacto de las tangentes tiradas desde A á las esferas, se verifican las igualdades

$$Aa = AF, \quad Aa' = AF',$$

y sumando estas

$$aa' = AF + AF' = FF' + 2AF.$$

Por la misma razon

$$Bb' = BF', \quad Bb = BF, \quad bb' = BF' + BF = FF' + 2BF'.$$

Ahora bien, siendo $aa' = bb'$, tiene que ser

$$FF' + 2AF = FF' + 2BF',$$

y por consiguiente $AF = BF'$: luego

$$FM + F'M = bb' = FF' + AF + BF' = AB.$$

Esto hace ver que uniendo cualquier punto M de la curva AMBM′ con los F y F′, la suma $FM + MF'$ es constante é igual á AB; luego dicha seccion es una elipse, AB el eje mayor, y F y F′ los focus (724).

Teorema II.

894. *Toda seccion causada en una superficie cónica circular recta por un plano que corte á todas sus generatrices, á unas á un lado y á otras á distinto del centro, es una hipérbola.*

Haciendo pasar por el eje VO (fig. 348) un plano perpendicular al secante, trazando una circunferencia tangente á VA, VB y á la interseccion de los dos planos, otra tangente á esta interseccion y á las prolongaciones de VA y VB, suponiendo que F y F′ son los puntos de contacto de las esferas engendradas por estas circunferencias con el plano secante, que ab y $a'b'$ son las circunferencias de contacto de estas esferas con las respectivas hojas de la superficie cónica, y, por último, tomando un punto cualquiera M en el perímetro de la seccion, uniéndole con los F y F′, y tirando la generatriz VM, se tendrá, por las mismas consideraciones hechas en la demostracion del teorema anterior,

$$MF' = MK', \quad MF = MK,$$

y restando ordenadamente,

$$MF' - MF = MK' - MK = KK' = aa' = bb'.$$

Además, las dos tangentes tiradas desde A á la esfera que toca en F′ al plano secante, dan

$$Aa' = AF',$$

y las tiradas desde el mismo punto á la esfera tangente en F, tambien dan

$$Aa = AF,$$

y restando ordenadamente estas igualdades, resulta

$$aa' = AF' - AF = AB + BF' - AF.$$

Por las mismas razones tenemos

$$Bb=BF, \quad Bb'=BF', \quad bb'=BF-BF'=BA+AF-BF',$$

y como $aa'=bb'$, será

$$BF'-AF=AF-BF',$$

de donde

$$BF'=AF;$$

luego

$$MF'-MF=bb'=AB+AF-BF'=AB.$$

Esto hace ver que todo punto M de la seccion goza de la propiedad de que la diferencia de sus distancias á los puntos F y F′ es constante é igual á AB; luego la seccion es una hipérbola, AB el eje transverso, F y F′ los focus.

Teorema III.

895. *La seccion causada en una superficie cónica circular recta por un plano paralelo á una de las generatrices es una parábola.*

Haciendo pasar (fig. 349), como en las demostraciones anteriores, un plano por VO que sea perpendicular al secante, resultará por traza del primero sobre el segundo la recta AB paralela á la generatriz Vb, que es á la que se supone paralelo el plano secante. Suponiendo que F sea el punto de contacto de la esfera engendrada por la circunferencia inscripta á las rectas Vb, Va y AB con el plano secante, y que aKb sea la circunferencia de contacto de la esfera con la superficie cónica, tomando un punto cualquiera M de la seccion, tirando la generatriz VM correspondiente á este punto y uniendo M con F, resulta que MF $=$ MK, por ser tangentes tiradas desde un mismo punto á una esfera. El plano que pasa por Vb y VK cortará al secante, que es paralelo á Vb, segun la recta MT paralela á AB (447); y el de la circunferencia aKb tendrá por traza sobre el secante la XY perpendicular á AB: por consiguiente, se verifica

$$MT : Vb :: MK : VK;$$

y por ser Vb=VK, será MT=MK; luego MF=MT. Queda pues demostrado que para cualquier punto de la seccion causada en la superficie cónica circular recta por un plano paralelo á la generatriz Vb son iguales las distancias al punto F y á la recta XY: por consiguiente, la seccion es una parábola que tiene F por focus y XY por directriz (754).

896. Un cilindro recto de base circular puede ser considerado como un cono de la misma clase cuyo vértice ó centro se haya alejado al infinito: por consiguiente, si un plano oblícuo á las generatrices corta á la superficie curva de dicho cilindro, producirá (**893**) una elipse; esto mismo puede demostrarse directamente del modo que sigue.

TEOREMA IV.

897. *En un cilindro recto circular, toda seccion oblícua á las bases es una elipse.*

Suponiendo que la seccion sea AMBM′ (fig. 350), tirando por el eje un plano perpendicular al secante, llamando BA á su traza sobre este, y concibiendo dos esferas, engendrada una por la circunferencia inscripta en bBAa, y la otra por la inscripta en b'BAa', y suponiendo que F y F′ sean los respectivos puntos de contacto de estas circunferencias con AB, puntos que lo serán tambien de las esferas con el plano secante, y suponiendo finalmente que aKb y a'K′b' sean las circunferencias de contacto de las esferas con la superficie cilíndrica, tendrémos por las mismas consideraciones que en (**893**) las igualdades

$$\mathrm{FM}+\mathrm{F'M}=\mathrm{MK}+\mathrm{MK'}=\mathrm{KK'}=aa'=bb';$$

además

$$\mathrm{A}a'=\mathrm{AF'},\quad \mathrm{A}a=\mathrm{AF};$$

por consiguiente,

$$aa'=\mathrm{AF'}+\mathrm{AF}=\mathrm{FF'}+2\mathrm{AF};$$

y como tambien

$$\mathrm{B}b'=\mathrm{BF'},\quad \mathrm{B}b=\mathrm{BF},$$

y en su virtud,

$$bb'=\mathrm{BF'}+\mathrm{BF}=\mathrm{FF'}+2\mathrm{BF'},$$

tiene que ser

$$\mathrm{AF}=\mathrm{BF'},$$

y por lo mismo

$$\mathrm{FM}+\mathrm{MF'}=aa'=\mathrm{AB}.$$

Queda pues demóstrado que uniendo cualquier punto M de la seccion con los F y F′, la suma de las distancias á estos puntos es constante é igual á AB; luego la seccion es una elipse, AB el eje mayor, F y F′ sus focus (**724**).

FIN DE LA GEOMETRIA.

NOCIONES ELEMENTALES

DE

GEOMETRÍA DESCRIPTIVA.

§ I.—Definiciones y principios generales.

1. *La* GEOMETRÍA DESCRIPTIVA *tiene dos objetos: Dar á conocer los métodos que hay para representar en una hoja de papel, que solo tiene las dos dimensiones de longitud y latitud, todos los cuerpos que sea posible definir exactamente, y*

Enseñar los medios de reconocer por una simple descripcion gráfica, que sea exacta, las formas de los cuerpos, y deducir de ellas todas las verdades que resulten de su figura y posiciones respectivas.

Este doble objeto se ha conseguido por el *método de las proyecciones.*

2. *La posicion en el espacio de un punto, de una recta ó de una curva queda determinada cuando se conocen las proyecciones del punto* (G., 449) *de la recta ó de la curva* (G., 450) *sobre dos planos que se corten.* Sean, en efecto, A y A′ (fig. 1) las proyecciones de un cierto *punto* sobre los planos *fijos* LTH y LTV: si por A levantamos una perpendicular al plano LTH, esta será el lugar geométrico de todos los puntos que se proyecten en A sobre el mismo plano (G., 437); luego pasará por el que se busca. Por una razon semejante, este se hallará sobre la perpendicular al plano LTV levantada en A′; luego estará en el punto *a* en que se corten estas dos perpendiculares, y queda su posicion completamente determinada.

Sean ahora AB y A′B′ las proyecciones de una misma recta (G., 451) sobre dos planos LTH y LTV; el perpendicular al LTH que hagamos pasar por AB será el lugar geométrico de todas las rectas que tengan á esta por proyeccion sobre el LTH; luego pasará por la recta de que se trata: por una razon análoga, esta se hallará en el plano levantado por la recta A′B′ perpendicularmente al LTV; luego estará en la interseccion *ab* de los dos planos, y quedará perfectamente determinada su posicion.

Por último, sean PQR y P′Q′R′ las proyecciones de una misma curva. Se construirán dos superficies cilíndricas que tengan por directrices estas proyecciones, y cuyas generatrices sean respectivamente perpendiculares á los planos LTH y LTV; claro es que la curva que se busca debe hallarse sobre cada una de estas dos superficies, y por consiguiente, será su comun interseccion *pqr*. Luego su forma y posicion en el espacio quedan completamente determinadas.

3. El ángulo que forman entre sí los planos de proyeccion es completamente arbitrario; sin embargo, los artistas que usan el método de las proyecciones han creido mas cómodo que sea el recto, y á causa sin duda de lo habituados que están al nivel y á la plomada (434), acostumbran á suponer que uno de estos planos es horizontal y el otro vertical; por consecuencia de esto, llaman *línea de tierra* á su interseccion LT.

4. Segun este convenio, que adoptarémos, cuando en lo sucesivo digamos que están dados un punto ó una línea, debe sobreentenderse que son conocidas sus *proyecciones horizontal y vertical*, es decir, sus proyecciones sobre un plano horizontal y otro vertical.

5. Ya que sabemos determinar la posicion de un punto ó de una línea en el espacio, conviene que indiquemos la manera de representar uno ú otra sobre una hoja de papel. Para conseguirlo, supondrémos que el plano vertical LTV ha girado alrededor de la línea de tierra LT como charnela, hasta rebatirse sobre el horizontal y formar con él un solo y mismo plano HV′.

La parte del papel que está situada encima de la línea de tierra LT representará á la vez la superior del plano vertical y la posterior del horizontal, mientras la parte que queda debajo de LT representa la anterior del plano horizontal y la inferior del vertical. Así, todas las construcciones que hayan de ejecutarse sobre los dos planos de proyeccion, se ejecutarán sobre una hoja de papel, y para tener en su verdadera posicion las proyecciones horizontales y verticales de los puntos y líneas que estén en el espacio, no habrá mas que volver á levantar el plano vertical, haciendo que verifique un cuarto de revolucion alrededor de la línea de tierra LT.

6. Se deduce del convenio precedente, que *las proyecciones horizontal y vertical de todo punto del espacio estarán siempre representadas en una misma perpendicular á la línea de tierra.* Porque considerando los dos planos de proyeccion en su verdadera posicion rectangular, el determinado por las perpendiculares *a*A y *a*A′, ba-

jadas desde *a* sobre aquellos, será perpendicular á la línea de tierra, y los cortará por las perpendiculares á esta AO y A′O. Pero la segunda no dejará en todo el movimiento de rotacion del plano LTV de ser perpendicular á LT; luego, despues del rebatimiento de este plano sobre LTH, la recta A′O habrá venido á colocarse en OA″ sobre la prolongacion de AO; por consiguiente, *las dos proyecciones horizontal y vertical* A *y* A′ *del punto* a *se hallarán entonces sobre una misma perpendicular á la línea de tierra, y además, sus distancias* AO *y* A″O *á esta línea serán iguales á las que habia en el espacio desde este mismo punto á los planos vertical y horizontal.*

7. Conviene observar que *dos puntos* A *y* A′ *colocados en una misma perpendicular á la línea de tierra, son forzosamente proyecciones de un cierto punto del espacio;* porque, si se levanta el plano vertical hasta dejarlo formando ángulo recto con el horizontal, y por cada uno de dichos puntos se levanta una perpendicular al plano sobre que se halla, las dos perpendiculares así levantadas estarán contenidas en el plano A′OA perpendicular al de proyeccion, y por lo tanto se tendrán que encontrar.

8. Igualmente, *dos rectas que, estando trazadas en los planos de proyeccion, no sean perpendiculares á la línea de tierra, son necesariamente proyecciones de otra recta cuya posicion en el espacio está completamente determinada.* Però si fueran perpendiculares en un mismo punto de la línea de tierra, servirian de proyecciones á todas las rectas situadas en el plano que se tirase por una de ellas perpendicularmente á LT, y por lo mismo, no bastarian ellas solas para determinar una recta.

9. Tambien hay que tener presente que *todos los puntos y líneas que se hallen situados en uno de los planos de proyeccion, se proyectan sobre el otro en la misma línea de tierra* (G., 482).

10. La posicion de un plano se determinará dándose sus dos trazas sobre los de proyeccion (G., 19). Estas se cruzarán necesariamente en la línea de tierra; pero el ángulo que formen despues del rebatimiento del plano vertical sobre el horizontal será muy distinto del que forman en el espacio.

Si el plano es perpendicular á los de proyeccion, sus trazas formarán una sola perpendicular á la línea de tierra (G., 484).

Si es paralelo á uno de ellos, su traza sobre el otro será paralela á la línea de tierra (G., 454), y basta para determinarle.

Si es paralelo á la línea de tierra, sus dos trazas tambien lo serán á esta.

11. Convendrémos en representar por *letras sin acento* las proyecciones horizontales de un punto ó de una recta, y por *letras acentuadas* las *verticales* : además, para designar un punto *a* del espacio, escribirémos entre paréntesis las dos letras que corresponden á sus proyecciones; de modo que el símbolo (A, A′) designa el punto *a* del espacio que tenga por proyeccion horizontal la A, y por vertical la A′. Por analogía, se escribirá (AB, A′B′) para indicar la recta *ab* del espacio que tenga AB por proyeccion horizontal, y A′B′ por vertical.

12. Tambien se ha convenido en representar por *una línea llena* y *seguida* los *datos* y las *incógnitas* de un problema, cuando sean *visibles;* mas si son *invisibles*, se harán *puntuadas;* es decir, por medio de *puntos* bien *redondos*.

Se supone que el observador está colocado encima del plano horizontal, delante del vertical, y á una distancia infinita de estos dos planos. De este modo, las visuales que dirija á las proyecciones de un objeto pueden considerarse perpendiculares á los planos de proyeccion, y que coinciden con las rectas por las cuales se han obtenido aquellas proyecciones. Por lo tanto, *cuando una línea se encuentre debajo del plano horizontal ó detrás del vertical, se deberá considerar como invisible, y por consiguiente*, HACERLA DE PUNTOS. Igualmente, *si una línea estuviera oculta para el espectador por una superficie que forme parte de los datos del problema, tambien se la dibujará con* PUNTOS REDONDOS.

Al contrario, TODAS *las líneas de construccion*, es decir, aquellas que se trazan para llegar á la determinacion de las incógnitas, *ya sean ó no visibles, se dibujarán por medio de* TRAZOS, esto es, por medio de partes de rectas sumamente pequeñas.

§ II.—Problemas sobre rectas y planos.

Problema I.

13. *Dadas las dos proyecciones* AB *y* A′B′ (fig. 2) *de una recta, construir sus trazas, es decir, los puntos en que corta á los planos de proyeccion* [1].

---

[1] Antes de empezar un dibujo, debe trazarse con el mayor cuidado y con auxilio del compás dos rectas perpendiculares entre sí (G., **141**), que dividan el papel en cuatro partes iguales. Estas rectas servirán de directrices para trazar con la *escuadra*, paralelamente á una de ellas, la línea de tierra (G., **151**, 3.°) y las demás rectas que hayan de ser perpendiculares ó paralelas á esta.

La traza horizontal de una recta es la proyeccion horizontal de sí misma, por lo que debe hallarse en AB; además, ha de tener su proyeccion vertical en la línea de tierra LT y sobre A'B' (9), esto es, en C', interseccion de estas dos rectas; luego tiene que hallarse en la perpendicular á LT que se levante por este punto (6), y será el C. Por consiguiente, *para construir la traza horizontal de una recta, se prolonga la proyeccion vertical de esta hasta que corte á la línea de tierra: en el punto en que esto se verifique, se levanta una perdendicular á esta línea, y el de interseccion con la proyeccion horizontal de la recta es la traza buscada.*

La traza vertical de la recta dada es al mismo tiempo su proyeccion vertical; luego tiene que hallarse en alguno de los puntos de A'B': al mismo tiempo se ha de proyectar horizontalmente sobre la línea de tierra y sobre AB; luego lo hará en D, que es donde estas dos rectas se cortan, y por consiguiente, se encontrará en la perpendicular levantada por este punto á LT, y será D'. Así, *para construir la traza vertical de una recta, se prolonga la proyeccion horizontal de esta hasta que corte á la línea de tierra; en el punto de interseccion se levanta una perpendicular á esta última, y el punto en que esta perpendicular corte á la proyeccion vertical de la recta dada es la traza que se busca.*

PROBLEMA II.

14. *Tirar por un punto* (M, M') (fig. 2) *dado en el espacio, una paralela á una recta dada* (AB, A'B'), *y hallar la longitud de la parte comprendida entre el punto* (M, M') *y otro que se elija arbitrariamente.*

Hemos visto (G., 462) que la condicion necesaria y suficiente para que dos rectas que se hallan en el espacio sean paralelas, es que tambien lo sean sus proyecciones sobre dos planos que se corten. Por lo tanto, las de la recta pedida deben ser respectivamente paralelas á AB y A'B'; pero pasando esta recta por el punto (M, M'), deben pasar sus proyecciones por las de este punto, y las tendrémos tirando por M la paralela ME á la AB, y por M' la M'E' á la A'B'.

Hecho esto, bajemos sobre la línea de tierra y desde cualquier punto N' de M'E' una perpendicular, que prolongarémos hasta que encuentre á ME, y el punto (N, N') que determinamos así, será uno de los de la paralela. Ahora queremos hallar su distancia al (M, M'), es decir, la longitud de la recta cuyas proyecciones son MN y M′N′. Esta es el cuarto lado de un trapecio formado por MN y las verticales que proyectan sus estremos sobre el plano horizontal; y es claro que, haciendo que gire este trapecio alrededor de MN como charnela, hasta *rebatirle* sobre el plano horizontal, los ángulos M y N habrán permanecido rectos, y se tendrá su rebatimiento levantando en M y N perpendiculares á MN, que serán las M*m* = FM′, N*n* = GN′ (6) y uniendo *m* con *n*. Luego *mn* es la longitud pedida.

Es claro que la prolongacion de *mn* pasará por la traza horizontal E de la recta (ME, M′E′). Esto proporciona un medio de *comprobar* la construccion, y tambien de hallar la inclinacion *m*M sobre el plano horizontal de una recta dada. Para esto se construirá el rebatimiento sobre este plano de un punto cualquiera de la recta, y se le unirá con la traza horizontal. De una manera análoga se determina la inclinacion de una recta sobre el plano vertical.

Puede tambien hallarse la longitud de (MN, M′N′) del modo que sigue: supongamos que se haga girar al plano que la proyecta horizontalmente alrededor de la vertical del punto (M, M′), hasta que haya venido á quedar paralelo al vertical: en este caso, el punto N se habrá colocado sobre MI paralela á LT, describiendo un arco de círculo, de modo que el punto (N, N′) se proyectará verticalmente sobre la perpendicular IK á la LT; pero es evidente que en este movimiento la altura de dicho punto sobre el plano horizontal se habrá conservado la misma; luego este se proyectará tambien sobre la N′K tirada paralelamente á LT por el punto N′, y por consiguiente, su proyeccion será K. Por lo tanto, M′K será ahora la proyeccion vertical de la distancia pedida, é igual á ella, porque la recta (MN, M′N′), hallándose ya en una posicion paralela al plano vertical, es igual en longitud á su proyeccion sobre este.

Luego *la distancia entre los puntos* (M, M′) *y* (N, N′) *es la hipotenusa* M′K *de un triángulo rectángulo* M′KO *que tiene por altura* M′O, *diferencia entre las alturas de los dos puntos sobre el plano horizontal, y por base una recta* KO *igual á la distancia* MN *que hay entre las proyecciones horizontales de ambos puntos.*

Problema III.

15. *Por un punto dado* (A, A′) (fig. 3), *tirar un plano paralelo á otro, cuyas trazas* PQ *y* QR′ *tambien están dadas.*

Cuando dos planos son paralelos, sus trazas sobre los de proyeccion lo son tambien, y recíprocamente; por lo que las del que buscamos, deberán serlo á PQ y QR′, de modo que estarán determinadas así que se pueda obtener un punto de una de ellas, pues además deben concurrir las dos en uno mismo de la línea de tierra. Para conseguirlo, obsérvese que tirando por el punto (A, A′) una paralela á una recta cualquiera trazada en el plano PQR′, esta paralela tiene que hallarse en el que se pide (G., 456); por consiguiente, construyendo sus trazas, se tendrá un punto de cada una de las del plano buscado; y servirá de comprobacion el que las paralelas tiradas á PQ y á QR′ por los puntos hallados deberán concurrir en uno mismo de LT.

Pero en vez de tomar la *recta auxiliar* paralela á una *cualquiera* trazada en el plano PQR′ será mucho mas sencillo tirarla paralelamente á una de las trazas de este, por ejemplo, á la horizontal que es conocida. Por consiguiente, tiraremos por el punto A una paralela á PQ, y por A′ otra á LT (14), porque PQ es ella misma su proyeccion horizontal, y tiene á LT por la vertical (9); en seguida, construirémos (13) la traza vertical B′ de esta recta (AB, A′B′), y solo faltará que tiremos por B′ una paralela M′N á R′Q, y por N otra NM á la PQ para tener el problema resuelto.

Si se quiere comprobar la construccion anterior, no hay mas que buscar un punto de la traza horizontal del plano pedido, que se tendrá tirando por el (A, A′) una paralela á la traza vertical del plano dado, y este punto deberá hallarse en MN.

16. La construccion precedente seria imposible cuando las trazas PQ y P′Q′ (fig. 4) del plano dado fuesen paralelas á la línea de tierra; porque teniéndolo que ser tambien la línea auxiliar, no podria encontrar á los planos de proyeccion. Habrá entonces que tirar por el punto (A, A′) una paralela á una línea cualquiera trazada en el plano dado; ó lo que es mas fácil, hacer que pase por dicho punto *un plano de perfil*; esto es, uno perpendicular á la línea de tierra; sus trazas OR y OR′ formarán una perpendicular á LT (10), que cortará á las del plano dado en los puntos P y P′. Por consiguiente, la recta que una en el espacio el punto P con P′, será la interseccion de estos dos planos. En este supuesto, rebátase el plano auxiliar sobre el horizontal, haciéndole girar alrededor de OR, la traza vertical OR′ se rebatirá en LT, y el punto P′ vendrá á colocarse en P″, despues de describir un arco de círculo, de modo que el rebatimiento de la traza del plano dado sobre el de perfil será PP″. Pero el punto (A, A′), arrastrado por el movimiento del plano auxiliar,

habrá descrito tambien un arco de círculo, cuyo centro será A, y el radio A′O, y cuyo plano será perpendicular á OR, de modo que se rebatirá en A″; luego si por este punto tiro una paralela CD á PP″, esta será la posicion en que caiga la recta tirada por (A, A′) paralelamente á otra situada en el mismo plano. Mas cuando el de perfil vuelva á su posicion primitiva, D no variará, porque se halla sobre el eje de rotacion; C describirá un cuadrante CD′; la paralela tirada por (A, A′) á la recta que una en el espacio P con P′, cortará á los planos de proyeccion en D y D′, y las trazas del que se busca serán las DS y D′S′ paralelas á la línea de tierra.

PROBLEMA IV.

17. *Hacer pasar un plano por tres puntos dados* (A, A′), (B, B′) y (C, C′) (fig. 5).

Únanse estos puntos de dos en dos por medio de rectas, y como estas se hallarán evidentemente contenidas en el plano que se busca, construyendo sus trazas, tanto horizontales D, E, F, como verticales D′, E′, F′ (13), se tendrán tres puntos de cada una de las del plano, y por consiguiente, quedarán determinadas estas. Únanse, pues, D con F y D′ con F′ por las rectas DF y D′F′, estas resolverán el problema, y darán tres comprobaciones, porque deben pasar respectivamente por E y E′, y cortarse en un mismo punto de LT.

Con igual facilidad se hace pasar un plano *por un punto y una recta dados*, para lo que no hay mas que tomar dos puntos sobre la recta, por ejemplo, sus trazas, y se tiene reducido el problema al anterior.

PROBLEMA V.

18. *Construir la interseccion de dos planos dados por dos trazas* PQ y QR′, PS y SR′ (fig. 6).

El punto P en que se cruzan las trazas horizontales de los dos planos, es evidentemente el mismo en que su comun interseccion corta al plano horizontal, é igualmente R′ es la traza vertical de la misma recta; pero P tiene por proyeccion vertical el pié A′ de la perpendicular PA′ á la línea de tierra, y la horizontal de R′ es B sobre la misma línea; luego, tirando R′A′ y PB, estas serán las proyecciones vertical y horizontal de la interseccion pedida.

Por lo tanto, *para construir la proyeccion horizontal de la interseccion de dos planos, bájese una perpendicular sobre la línea de* *tierra desde el punto en que se cruzan sus trazas verticales, y únase el pié de esta perpendicular con aquel en que se cortan las horizontales. Por una construccion análoga se halla la proyeccion vertical.*

19. Si las trazas que se dan de los planos PQP′ y RSR′ (fig. 7) no se cortan dentro de las márgenes del papel, no es aplicable la regla que acabamos de dar. En este caso se llevará paralelamente á uno de los planos de proyeccion, al vertical por ejemplo, otro *auxiliar*, cuyas trazas sobre los dados es evidente que se cruzarán en la comun interseccion de estos, de modo que, construyendo estas trazas, ya se tendrá un punto de esta línea. Sea AB la traza horizontal del plano auxiliar; las rectas en que corte á PQP′ y RSR′ serán las paralelas á QP′ y SR′ bajadas respectivamente desde A y B; luego sus proyecciones verticales serán C′F′ y D′F′. Por lo tanto, si desde F′ se baja una perpendicular á LT prolongada hasta que encuentre á AB, se tendrá un punto (F, F′) de la interseccion que se busca, y repitiendo esta construccion, se hallará otro segundo, que acabará de determinarla.

20. Supongamos que el plano PSR′ (fig. 6) se mueva de modo que, conservándose fija la traza vertical, la horizontal tienda á tomar una posicion paralela al plano PQR′; en este movimiento los puntos P y A′ se irán alejando indefinidamente de los respectivos B y R′, describiendo las rectas QP y LT, de manera que en su límite habrán quedado PB y R′A′ paralelas, una á las dos trazas horizontales, y la otra á la línea de tierra. Y efectivamente, en la hipótesis actual, pasando los dos planos por dos paralelas QP y US, su interseccion tendrá que serlo á estas rectas (G., 447), y por consiguiente, sus proyecciones BC y R′C′ serán tambien paralelas á las de estas, esto es, á las mismas rectas y á la línea de tierra.

Obsérvese, sin embargo, que si las trazas horizontales de los dos planos dados fueran perpendiculares á la línea de tierra, se reduciria la proyeccion vertical de su interseccion al punto R′ (G., 484).

21. Si las trazas horizontales y verticales de los dos planos dados fueran paralelas, seria imposible la construccion que hemos esplicado en el n.° 18; pero tambien es verdad que entonces los dos planos serian paralelos, y no tendrian interseccion.

Hay, no obstante, un caso en que tampoco se puede efectuar, aunque se corten los dos planos, y es aquel en que las trazas PQ y P′Q′, RS y R′S′ (fig. 8) sean todas cuatro paralelas á la línea de tierra; pero estando dispuestas como se ve en la figura, entonces tambien la interseccion de los planos será paralela á LT, y lo mismo sus proyecciones; de suerte que bastará para determinarlas hallar un punto de cada una. Pero si se tira un plano de perfil (16) MOM', sus intersecciones con los dados serán las rectas que unan en el espacio P con P' y R con R'. En este supuesto, rebatamos el plano MOM' sobre el horizontal, haciéndole girar alrededor de OM: su traza vertical OM' se rebatirá en OL, y los puntos P' y R' de esta recta se colocarán en P'' y R'', de manera que las trazas de los planos dados sobre el de perfil tendrán por rebatimiento PP'' y RR'', y por lo mismo, el punto A'', en que se cruzan, es el de aquel en que la interseccion de los dos planos dados atraviesa al MOM'. Así, pues, bajando AA'' perpendicular sobre OM, y levantando el plano auxiliar á su posicion primitiva, el punto A'' describirá un cuadrante cuyo centro estará en A y el radio será AA'', y así se proyectará horizontalmente en A y verticalmente sobre OM' á una distancia de O igual á AA''. Las paralelas AB y A'B' á la línea de tierra tiradas por A y A' resuelven el problema.

Notarémos que, en vez de tomar el plano auxiliar perpendicular á la línea de tierra, se le hubiera podido sujetar á la única condicion de cortar á los dos dados; pero no hubieran sido tan sencillas las construcciones necesarias.

22. En fin, puede suceder que las trazas OP y OP', OR y OR' (figura 9) de ambos planos corten en un mismo punto O á la línea de tierra. Entonces, córtense los dos por uno de perfil, que se rebatirá sobre el horizontal haciendo que gire alrededor de su traza sobre este, y se tendrán los rebatimientos PP'' y RR'' de las trazas de los planos dados sobre el de perfil, de manera que, volviendo este á su posicion primitiva, el punto A'' en que aquellos se corten se proyectará en A y A'. Pero las proyecciones de la interseccion deben pasar por O; luego serán OA y OA'.

PROBLEMA VI.

23. *Construir el punto de interseccion de una recta* (AB, A'B') *con un plano dado* PQR' (fig. 10).

Si por la recta dada se hace pasar un plano cualquiera, es claro que el punto en que esta corte al PQR' será uno de los de la traza del auxiliar sobre este, y por consecuencia, las proyecciones del punto pedido se hallarán á la vez sobre las de la recta dada y las de esta traza, por lo que estarán en sus comunes intersecciones. Por lo tanto, lo primero que hay que hacer es que pase un plano por la recta (AB, A'B').

Para mayor sencillez en las construcciones, tomarémos por plano auxiliar al mismo que proyecta á la recta horizontalmente, cuya traza en este sentido será AB y la vertical BR′ levantada perpendicularmente á LT por B (G., 484). Se construirá la proyeccion vertical R′D′ de la interseccion de los dos planos PQR′ y ABR′ (18), y el punto M′ en que encuentre á A′B′ será la proyeccion vertical del de interseccion de la recta (AB, A′B′) con el plano PQR′; de modo que, bajando desde M′ una perpendicular M′M sobre LT, se determinará la proyeccion horizontal M del mismo punto.

Se tendrá una comprobacion, tomando por plano auxiliar el proyectante de (AB, A′B′) sobre el vertical, porque la proyeccion horizontal de la traza de este plano sobre PQR′ deberá pasar por M.

Téngase presente que, en la figura, la parte (MA, M′A′) de la recta (AB, A′B′) está toda ella encima del plano PQR′, y es, por lo tanto, visible, al paso que la (MB, M′B′) de la misma es invisible por hallarse debajo de aquel plano; razon por la cual la una está representada por una *línea llena* y la otra por una de *puntos*.

24. Si la recta dada (AB, A′B′) (fig. 11) fuese perpendicular á uno de los planos de proyeccion, al horizontal por ejemplo, la traza sobre este plano del auxiliar no estará sujeta á mas condicion que á la de pasar por el punto A, y lo mejor que podrá hacerse es dirigirla paralelamente á la del plano dado: sean, pues, AC y CC′ las de este; la proyeccion vertical de su interseccion con PQR′ será la C′M′ paralela á la línea de tierra (20); de modo que A y M′ son las dos proyecciones del punto que se buscaba.

25. Conviene advertir que esta construccion da el medio de resolver este problema: *dada una de las proyecciones de un punto que pertenece á un plano, hallar la otra.* Porque el punto del plano PQR′ que se proyecta en A, es la misma interseccion de este plano con la vertical tirada desde A.

26. Si la recta dada fuese paralela á la línea de tierra (fig. 12), se construiria tambien la proyeccion vertical de la recta en que el plano PQR′ quede cortado por el que la proyecta horizontalmente (19).

27. Si el plano dado es perpendicular á la línea de tierra, sus trazas formarán una perpendicular á LT, y los puntos en que corte á las proyecciones de (AB, A′B′) serán la solucion del problema.

28. Para resolver el problema del n.° 23 empleando un plano auxiliar cualquiera, se tendrá presente que sus trazas no están sujetas á mas condicion que á la de pasar por la horizontal C y vertical C′ de la recta (AB, A′B′) (fig. 13), por lo que se tirará por C una recta cualquiera OCP, y uniendo el punto C′ con el de interseccion de esta con LT, se tendrá las trazas de un plano POR′, que contendrá á la recta dada, por tener esta dos puntos en dicho plano. Así, pues, se construirá la interseccion (PD, R′D′) de este con el PQR′, y el punto (M, M′), comun á esta recta y á (AB, A′B′), resolverá el problema. Sirve de comprobacion el que MM′ debe ser perpendicular á LT.

Problema VII.

29. *Desde un punto dado* (A, A′) *bajar una perpendicular á un plano dado* PQR′, *y hallar su longitud* (fig. 14).

Sabemos (G., 485 y 436) que la condicion necesaria y suficiente para que una recta sea perpendicular á un plano, es que sus proyecciones sobre otros dos que se corten sean perpendiculares á las trazas del propuesto sobre estos. Así, las proyecciones de la recta que se pide deben ser perpendiculares á PQ y á QR′; mas una vez que la recta debe pasar por (A, A′), sus proyecciones pasarán por las de este punto, y se las tendrá tirando por A y A′ las AB y A′B′ perpendiculares respectivamente á las PQ y QR′.

Para tener la longitud de la parte de esta perpendicular comprendida entre (A, A′) y el plano PQR′, no hay mas que buscar (23) la interseccion (M, M′) de la recta (AB, A′B′) con el plano, y queda reducida la cuestion á encontrar la distancia entre dos puntos (A, A′) y (M, M′). Por consiguiente, se tirará por M′ una paralela á la línea de tierra, sobre la que se tomará, á partir de AA′, una distancia CM″=AM, y uniendo A′ con M″ se tendrá la longitud buscada (14).

30. Suponiendo que las trazas PQ, P′Q′ (fig. 15) del plano que se da sean paralelas á la línea de tierra, se hará pasar por el punto (A, A′) un plano de perfil, que se rebatirá sobre el horizontal; su traza sobre el dado y el punto (A, A′) tendrán por rebatimiento la recta PP″ y el punto *a* (16); de modo que, bajando desde este la *am* perpendicular á PP″, se tendrá la longitud de la que se busca. Para tener la proyeccion del pié de esta recta, se volverá el plano auxiliar á su primitiva posicion, y en el movimiento que esto exige, el punto *m* describirá un cuadrante cuyo radio será la perpendicular *m*M bajada desde *m* sobre el eje de rotacion; de modo que el pié de la perpendicular se proyectará horizontalmente en M y verticalmente en M′ á una distancia de la línea de tierra igual á *m*M.

Problema VIII.

31. *Desde un punto dado* (C, C′) *bajar una perpendicular á una recta tambien dada* (AB, A′B′), *y hallar la longitud de dicha perpendicular* (fig. 16).

Si por el punto dado se lleva un plano perpendicular á la recta (AB, A′B′), y se une el punto de interseccion de este y de la recta con (C, C′), quedará resuelta la primera parte del problema; y en cuanto á la segunda, no puede ofrecer dificultad (14). Por consiguiente, la verdadera cuestion para nosotros es *hacer que pase por un punto dado* (C, C′) *un plano perpendicular á una recta dada* (AB, A′B′).

Debiendo ser sus trazas perpendiculares á las proyecciones de la recta dada (G., 485), quedarán determinadas cuando se pueda tener un punto de cualquiera de ellas, toda vez que tambien sabemos que se han de cortar las dos en uno mismo de la línea de tierra. Para conseguirlo, recuérdese que, haciendo pasar por CC′ una paralela á la traza horizontal del plano que se busca, se hallará situada en este; por lo que, construyendo el punto en que esta corte al vertical, se tendrá uno de los de la misma traza del plano desconocido. Mas las proyecciones de esta *recta auxiliar* deben ser paralelas á las de la traza horizontal de dicho plano; luego se las tendrá tirando por C una perpendicular CD á la AB, y por C′ una paralela C′D′ á la línea de tierra. Buscarémos la traza vertical D′ de (CD, C′D′), y tirando en seguida R′D′Q y PQ perpendiculares á A′B′ y AB, se habrán hallado las trazas del plano desconocido. Solo falta ya construir la interseccion (M, M′) de la recta (AB, A′B′) con el plano PQR′, unirla con (C, C′) y hallar la distancia entre estos dos puntos.

32. Si la recta dada (A, A′B′) (fig. 17) fuese perpendicular al plano horizontal, el que se tirase perpendicular á ella por el punto (C, C′), tambien seria horizontal, y quedaria, por consiguiente, determinado con solo conocer su traza vertical (10), la cual pasará por C′, por ser ella el lugar de las proyecciones verticales de todos los puntos del plano; luego (A, M′) seria la interseccion del plano auxiliar con la perpendicular pedida, CA y C′M′ las proyecciones de esta recta, y CA su verdadera longitud.

33. Si la (AB, A′B′) (fig. 18) fuera paralela á la línea de tierra, las trazas del plano auxiliar se confundirian con la recta que uniese las proyecciones del punto (C, C′), de modo que CM y C′M′ serian las de la perpendicular buscada; se tomaria, pues, M'M''=CM, y uniendo C' con M'' se tendria en C'M'' la longitud que se queria conocer.

34. Tambien puede resolverse el problema del n.° 31 por el *método de los rebatimientos*, del que hemos hecho ya algunas aplicaciones, y con el que conviene familiarizarse.

Hágase pasar un plano D'QA (fig. 19) por el punto (C, C') y la recta (AB, A'B'), lo que se conseguirá uniendo aquel punto con la traza horizontal (A, A') de la recta dada, y tirando luego otra D'B'Q por las verticales de (AC, A'C') y de (AB, A'B'), y otra por los puntos Q y A. Claro es que, rebatiendo éste plano con la recta (AB, A'B') y el punto (C, C') sobre el horizontal, no ofrecerá dificultad bajar de este punto una perpendicular á la recta. Pero cuando el plano D'QA gire alrededor de su traza horizontal QA, el punto B' irá describiendo un arco de círculo cuyo plano será perpendicular á esta traza; de modo que dicho punto vendrá á colocarse, al concluir el movimiento, en la perpendicular bajada desde B á AQ. Pero como Q ha permanecido inmóvil, su distancia á B' no ha variado, por lo que B' se colocará en *b*, donde la perpendicular BE indefinida queda cortada por el arco descripto desde Q como centro con QB' por radio; luego el rebatimiento de la recta dada es A*b*, porque no ha hecho mas que girar alrededor de A. Tomando sobre Q*b* una distancia Q*d*=QD', y uniendo A con *d*, se tendrá igualmente el rebatimiento de la recta (AD, A'D'), de modo que, bajando desde C una perpendicular al eje de rotacion AQ, el punto *c* en que cortará á A*d* será el rebatimiento del dado (C, C'). Por consiguiente, tirando *cm* perpendicular á A*b*, se tendrá la longitud de la que se pedia.

Para determinar ahora sus proyecciones, volverémos el plano AQD' á su posicion primitiva. Al moverse, irá el punto *m* describiendo un arco de círculo, cuyo plano será perpendicular al eje de rotacion AQ, de modo que, cuando haya vuelto á su primera posicion, se proyectará horizontalmente en la interseccion M de AB con la perpendicular bajada desde *m* sobre AQ. Su proyeccion vertical M' se hallará tirando la MM' perpendicular á la línea de tierra.

35. Harémos observar que esta última resolucion del problema VIII encierra la de este otro: *hallar el ángulo que forman las trazas de un plano* B'QA; porque este es igual á *b*QA. Así, para resolverle no hay mas que rebatir el plano dado, haciéndole girar alrededor de su traza horizontal, por ejemplo, construir el rebatimiento de un

punto cualquiera de su traza vertical, y unirle con aquel en que se cortan las dos trazas sobre la línea de tierra.

Problema IX.

36. *Construir los ángulos rectilíneos correspondientes á los diedros que un plano dado* PQR′ *forma con los de proyeccion* (fig. 20).

Tirando un plano perpendicular á PQ, el ángulo que formen sus trazas sobre el horizontal y el dado, será el rectilíneo correspondiente al ángulo diedro de estos dos planos. La horizontal del auxiliar es una perpendicular AO levantada sobre PQ en un punto cualquiera de esta recta (G., 475), y la vertical la A′O perpendicular en O á la línea de tierra; luego la recta que en el espacio una los puntos A y A′, será la traza del plano auxiliar sobre PQR′, y será la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos serán los OA y OA′. Para construirle, le rebatirémos sobre el plano vertical, haciéndole girar alrededor de OA′; A describirá el arco AA″, y uniendo A′ con A″, se tendrá el ángulo buscado A′A″O.

Tambien pudo construirse este rebatimiento sobre el plano horizontal, levantando á la AO la perpendicular OA‴ = OA′, y uniendo A con A‴.

De una manera análoga se construiria la inclinacion OBA ú OB′A$^{\text{IV}}$ del plano PQR′ sobre el vertical.

Si las trazas del que se da fuesen paralelas á la línea de tierra, el auxiliar se convertiria en un plano de perfil, y los ángulos pedidos serian los del triángulo formado por las trazas de este sobre el dado y los de proyeccion.

Problema X.

37. *Construir el ángulo rectilíneo correspondiente al diedro que forman dos planos dados* PQR′ *y* PSR′ (fig. 21).

Si tiramos un plano perpendicular á la interseccion de los dos dados, sus trazas sobre estos y el horizontal formarán un triángulo en que el ángulo opuesto al lado horizontal será el rectilíneo que se busca. Pero la traza horizontal del plano auxiliar ha de ser perpendicular á la proyeccion horizontal de la interseccion de los planos PQR′ y PSR′; luego construirémos esta proyeccion PA, y en este caso la BC, perpendicular tirada á esta por uno cualquiera de sus puntos, podrá tomarse como base del triángulo. Su vértice, que es uno de los puntos de la interseccion de los planos PQR′ y PSR′, se proyecta sobre AP; de consiguiente, uniéndole con D, la recta que resulte será la altura del triángulo (G., 442). Si pudiéramos determinar esta altura, no habria mas que llevarla sobre PD á partir de D, y se tendria el rebatimiento del vértice; porque en el movimiento de rotacion del plano auxiliar alrededor de su traza horizontal BC, describe este punto un arco de círculo, que tiene á D por centro, y cuyo plano es perpendicular á BC. Pero la altura del triángulo es la perpendicular bajada desde D sobre la recta que en el espacio una P con R′, porque esta, que es interseccion de los dos planos, es perpendicular al del triángulo; tambien es esta recta hipotenusa de uno rectángulo, cuyos catetos son PA y AR′; por consiguiente, rebato el triángulo sobre el plano vertical, haciéndole que gire alrededor de R′A; P y D vendrán á colocarse en P′ y D′, y tirando D′D″ perpendicular á R′P′, tendré la altura que buscaba. Tomaré DE = D′D″, y uniendo E con B y C, formaré el ángulo pedido AEC.

Si las trazas horizontales de los planos que se dan fuesen paralelas, no variará en nada la construccion precedente, sino que la hipotenusa R′P′ se hará infinita; es decir, paralela á la línea de tierra, de suerte que la altura del triángulo será R′A.

Si las trazas PQ y P′Q′, RS y R′S′ (fig. 8) de los dos planos fuesen paralelas á la línea de tierra, el auxiliar se convertirá en uno de perfil MOM′; se le rebatirá entonces sobre el plano horizontal, y el ángulo PA″R, formado por los rebatimientos PP″ y RR″ de sus trazas sobre los dos planos dados será el ángulo pedido (21).

38. Si se quiere *tirar un plano que divida en dos partes iguales al ángulo diedro formado por los* PQR′ y PSR′ (fig. 21), se observará que la traza del bisector sobre el auxiliar debe dividir en dos partes iguales al ángulo que acabamos de construir; luego la bisectriz del ángulo BEC será el rebatimiento de la traza de que se trata; de modo que el plano pedido debe pasar por el punto F, porque, cuando se vuelva el auxiliar á su primitiva posicion, la recta EF girará alrededor del mismo F; por otra parte, este plano debe tambien pasar por el punto P; luego PFG será su traza horizontal, y por consiguiente, R′G la vertical del mismo.

Problema XI.

39. *Construir el ángulo de dos rectas dadas* (fig. 22).

Hemos visto (G., 471) que, cuando dos rectas no se encuentran, su inclinacion mútua se mide por el ángulo que forma una de ellas con la paralela tirada á la otra por uno de sus puntos: podrémos suponer efectuada esta construccion ([1]), y proponernos, por consiguiente, encontrar el ángulo formado por las dos rectas (AB, A′B′) y (BC, B′C′), que se cortan en el punto (B, B′). Si se unen las trazas horizontales A y C de estas dos rectas, se formará un triángulo que tendrá AC por base, y cuyo ángulo del vértice (B, B′) será el buscado. Si bajamos la perpendicular BD sobre dicha base, y se une el punto D con el vértice, se tendrá la altura (G., 442); de suerte que, rebatiendo el plano de este triángulo sobre el horizontal, y haciéndole girar alrededor de AC, su vértice vendrá á colocarse en la línea DB, á una distancia de D igual á esta altura; porque describirá un arco de círculo que tendrá D por centro, y cuyo plano será perpendicular á AC. Mas esta altura es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuya base es BD, y B′E su altura, por lo que la determinarémos tomando sobre la línea de tierra una distancia EF = BD, y uniendo B′ con F, no habrá ya mas que llevar B′F desde D á *b* sobre DB, y tirar *b*A y *b*C. El ángulo A*b*C resolverá el problema.

40. Si las rectas dadas se cruzasen sobre el plano horizontal, se tiraria por un punto cualquiera de una de ellas una paralela á la otra, y quedaria reducida la cuestion á encontrar el ángulo formado por la paralela y la primera recta.

41. Si se supone que la segunda (fig. 23) gira alrededor del punto (B, B′), y tiende á hacerse paralela al plano horizontal, conservando la misma esta proyeccion, la vertical tenderá á ser paralela á la línea de tierra, de suerte que el punto C se alejará indefinidamente sobre la proyeccion BC; luego en el límite, es decir, cuando la segunda recta sea paralela al plano horizontal, AC lo habrá quedado á BC; y, con efecto, es claro que un plano que pase por una que lo sea al horizontal, debe cortar á este por una paralela á aquella

---

([1]) Dos rectas no se cortan, cuando la que une el punto de interseccion de sus proyecciones verticales con aquel en que se cortan las horizontales, no es perpendicular á la línea de tierra (8).

recta, y por lo tanto, á su proyeccion del mismo nombre. Así, pues, por A se tirará una paralela AC″ á la BC, y se concluirá la construccion lo mismo que antes.

PROBLEMA XII.

42. *Construir el ángulo formado por una recta* (AB, A′B′) *con un plano dado* PQR′ (fig. 24).

Desde un punto cualquiera (B, B′) de la recta dada, bajo una perpendicular (BC, B′C′) al plano PQR′, y el ángulo que formen ambas rectas será evidentemente el complemento del que la propuesta forma con su proyeccion sobre dicho plano, esto es, del que se busca (G., 472). Construirémos, pues, el A*b*C de las rectas (AB, A′B′) y (BC, B′C′), y levantando en *b* una perpendicular *b*G á C*b*, tendrémos en A*b*G el ángulo pedido.

PROBLEMA XIII.

43. *Hallar la menor distancia entre dos rectas* (AB, A′B′) y (CD, C′D′) *que no estén situadas en un mismo plano* (fig. 25).

Hemos demostrado en el n.° 470 de la *Geometría*, que la distancia que buscamos es la perpendicular comun á las dos rectas dadas, y que, para construirla, habia que tirar por un punto de *cd* una paralela *cf* á la *ab* (fig. 25 duplicada), bajar desde un punto cualquiera *b* de esta última una perpendicular *bg* al plano *fcd*; por el pié *g* de esta tirar *gi* paralela á *ab*, y por *i* la *ik* paralela á *bg*. Vamos, por lo tanto, á ejecutar estas diversas construcciones, que, segun se ve, solo son aplicaciones de los problemas resueltos anteriormente.

Principiarémos por determinar las trazas (13) de la recta (CD, C′D′): tirarémos por la vertical la (CF, C′F′) paralela á la (AB, A′B′); buscarémos su traza F, y tirando DFQ y QC′ tendrémos las del plano *fcd*. Desde la horizontal B de (AB, A′B′) bajarémos la (BG, B′G′) perpendicular á este plano (31), y determinando su pié (G, G′) (23), tirarémos por él la (GI, G′I′) paralela á la (AB, A′B′), que cortará á (CD, C′D′) en el punto (I, I′); de modo que II′ debe ser perpendicular á la línea de tierra, lo cual suministra una comprobacion de todas las construcciones que llevamos hechas. Tirarémos en seguida (IK, I′K′) paralela á (BG, B′G′), y las proyecciones K y K′ del punto en que corte á (AB, A′B′) tendrán tambien que hallarse en una perpendicular á la línea de tierra. La (IK, I′K′)

es la perpendicular pedida, y para hallar su verdadera magnitud, no habrá mas que tomar sobre la horizontal tirada por el punto K′ una distancia NM = IK, y tirar I′N, que resuelve el problema.

44. Obsérvese que, si las proyecciones de las dos rectas dadas no son paralelas, y si la que une el punto de interseccion de las verticales con aquel en que se cruzan las horizontales no es perpendicular á la línea de tierra, no estarán las rectas en un mismo plano (**39**, *nota*, y G., **462**).

§ III.—Problemas relativos á los triedros.

Problema XIV.

45. *Dados tres de los seis elementos de un triedro, determinar los otros por una construccion gráfica.*

En un triedro se distinguen seis elementos, á saber: tres ángulos planos y tres diedros; de manera que el enunciado de este problema presenta seis cuestiones que resolver; porque pueden darse sucesivamente:

1.° Los tres ángulos planos;

2.° Dos de estos y el diedro comprendido;

3.° Dos ángulos planos y el diedro opuesto á uno de ellos;

4.° Un solo ángulo plano y los dos diedros adyacentes;

5.° Un ángulo plano y dos diedros de los que el uno sea opuesto al primero;

6.° Los tres ángulos diedros.

Estos seis casos pueden reducirse á tres; porque, dados, por ejemplo, los tres diedros A, B, C de un triedro [1], los ángulos planos del suplementario son respectivamente $180^0 - A$, $180^0 - B$, $180^0 - C$; luego, si pudiéramos resolver el primer caso, se determinarian los diedros de este triedro suplementario, y tomando sus suplementos, estos serian los ángulos planos del propuesto [2]. Así,

---

[1] Convendrémos en representar por A, B, C los diedros de un triedro cualquiera, y por *a*, *b*, *c* los ángulos planos del mismo opuestos á aquellos; de modo que *a*, por ejemplo, es el ángulo plano opuesto al diedro A.

[2] Téngase presente que, para formar un triedro con tres ángulos diedros dados A, B, C, no basta que la suma de estos sea mayor que dos y menor que seis rectos (G., **498**), sino que es necesario que el mayor de los ángulos planos del triedro suplementario sea menor que la suma de los otros dos; de modo que, si A es el menor de los tres diedros A, B y C, es preciso que se verifique la desigualdad $180^0 - A < 180^0 - B + 180^0 - C$, ó lo que viene á ser lo mismo, $A > (B + C) - 180^0$, esto es, *que el ángulo diedro menor ha de ser mayor que el esceso de la suma de los otros dos sobre dos rectos.*

la sesta cuestion y la primera se reducen á una sola. Lo mismo sucede con la quinta y la tercera, y con la cuarta y la segunda, por lo que solo tenemos que ocuparnos de las tres primeras.

46. Primera cuestion. *Dados los tres ángulos planos* a, b, c *de un triedro, construir los rectilíneos correspondientes á sus diedros* (figura 26).

Construyendo sobre un plano cualquiera un ángulo ASB $= c$, y otros dos ASC$' = b$ y BSC$'' = a$, podrá considerarse que los dos últimos son los rebatimientos de los ángulos planos b y a sobre el plano del primero c. Por lo tanto, tomando las dos distancias iguales SC$'$ y SC$''$, y bajando por C$'$ y C$''$ perpendiculares C$'$AO y C$''$BO á las SA y SB, cuando los ángulos b y a hayan vuelto á su primitiva posicion, los puntos C$'$ y C$''$ se habrán reunido en uno solo, que llamarémos C, y como las rectas C$'$A y C$''$B no habrán dejado de ser perpendiculares á SA y SB, formarán entonces con AO y BO ángulos CAO y CBO, que serán los rectilíneos correspondientes á los diedros SA y SB.

Para construir el primero, observo que en el movimiento de rotacion del ángulo plano b alrededor de SA, el punto C describe una circunferencia que tiene por centro A, y por radio C$'$A, siendo su plano perpendicular á SA (G., 436). Luego, haciendo girar á este plano alrededor de su traza C$'$AO, el punto C vendrá á rebatirse sobre el plano ASB en alguno de la circunferencia C$'$C$_1$. Pero durante este movimiento, la recta CO, interseccion de los dos planos CAO y CBO, no habrá cesado de ser perpendicular á AO (G., 481); luego se rebatirá en la perpendicular C$_1$O á AO, de manera que C se hallará en C$_1$; el ángulo C$_1$AO será el rebatimiento de CAO, y por lo mismo, el rectilíneo correspondiente al diedro SA.

Del mismo modo veríamos que el ángulo C$_2$BO, correspondiente al diedro SB, se obtendria uniendo el punto B con el C$_2$, interseccion de la perpendicular levantada en O á OB con la circunferencia descrita desde B por centro con el radio BC$''$.

Para comprobar que estas construcciones estaban bien hechas, veríamos si eran iguales las rectas OC$_1$ y OC$_2$.

Finalmente, para tener el tercer ángulo diedro SC, no habrá mas que tomar para plano del desarrollo al del ángulo plano b ó al de a, ó será, *por lo general*, mas sencillo concebir que pasa por C uno perpendicular á la tercer arista SC. Sus trazas sobre los de a y b formarán un ángulo, que será el rectilíneo correspondiente al diedro SC, y sus rebatimientos sobre el plano del desarrollo las perpendiculares C'D, C''E á SC' y SC''; y como en todo el movimiento de los ángulos planos *a* y *b* los puntos D y E han permanecido fijos por hallarse en los ejes de rotacion, vemos que la recta DE es la traza sobre ASB del plano de que se trata. Rebatiéndole sobre ASB, haciéndole que gire alrededor de esta, las distancias desde C á D y E permanecerán iguales á C'D y C''E, de modo que C se rebatirá en γ, interseccion de los arcos descriptos con estos radios; luego DγE es el tercer ángulo pedido.

Observemos, sin embargo, que en caso de que el ángulo *b*, por ejemplo, fuera recto ú obtuso, la traza del plano perpendicular á la arista SC sobre el de dicho ángulo plano, seria paralela á SA, ó no la encontraria sino en su prolongacion. En el primer caso seria imposible la construccion; y en el segundo podria ser el ángulo DCE suplemento del que se pide.

Siempre que la construccion se pueda hacer, los tres puntos S, O y γ deben hallarse en una misma recta perpendicular á DE. Con efecto, por ser el plano CDE perpendicular á la SC, su traza DE sobre ASB debe serlo á la SO, proyeccion de esta recta sobre dicho plano (G., 485). Luego la que una C con I será perpendicular á DE (G., 442), lo mismo que su rebatimiento Iγ, que será, por consiguiente, prolongacion de SOI.

La resolucion de este problema será posible siempre que la suma de los tres ángulos *a*, *b*, *c* sea menor que cuatro rectos, y el mayor de ellos menor que la suma de los otros dos (G., 507).

47. SEGUNDA CUESTION. *Dados dos ángulos planos* b *y* c *y el diedro* A *comprendido por ellos, hallar el tercero y los dos diedros restantes.*

Todo está reducido á encontrar el tercer ángulo plano; porque entonces se pueden construir los dos diedros desconocidos, como lo acabamos de hacer en el anterior problema.

Formemos en un plano cualquiera dos ángulos ASB$=c$ y C'SA$=b$ (fig. 27); el último puede considerarse que es el rebatimiento del *b* sobre el plano de *c*. Luego si desde un punto C' cualquiera de SC se baja la C'AO perpendicular á SA, cuando *b* haya vuelto á su posicion primitiva, la C'A formará con AO un ángulo que será el rectilíneo correspondiente al diedro SA. Pero en el movimiento de rotacion de *b* alrededor de SA, el punto rebatido en C', que llamarémos C, describe una circunferencia cuyo centro es A y el radio C'A; luego, haciendo girar su plano alrededor de su traza C'AO, vendrá C á rebatirse sobre ASB en un cierto punto de la circunferencia C'C_1; pero, en todo el giro, la inclinacion de CA sobre AO no cambiará; luego esta recta se rebatirá en AC_1, que forma con AO un ángulo igual al rectilíneo correspondiente al diedro SA, de modo que C se encontrará entonces en C_1; por lo tanto, bajando desde este punto la C_1O perpendicular á AO, será O la proyeccion de C sobre el plano ASB. Luego, uniendo C con el pié de la perpendicular OB á SB, la CB lo será á SB, de modo que, cuando el tercer ángulo plano se haya rebatido sobre ASB, el punto C se encontrará en la prolongacion de OB. Pero su distancia á S, que pertenece á la charnela SB, no habrá variado; por consiguiente, este punto se hallará tambien en la circunferencia SC′, quedará determinado por la interseccion con esta C″, y será BSC″ el rebatimiento del tercer ángulo plano.

48. TERCERA CUESTION. *Dados dos ángulos planos* a *y* c, *y el diedro* A *opuesto al primero, determinar el tercer ángulo plano y los otros dos diedros.*

Este problema se reduce tambien, lo mismo que el anterior, á determinar el tercer ángulo plano *b*.

Construyamos sobre un plano los ángulos ASB$=c$ y BSC″$=a$ (fig. 28), y podrémos considerar que el último es el rebatimiento de *a* sobre el plano de *c*. En este supuesto, concibiendo un plano vertical BA′ perpendicular á SA, y haciendo en él un ángulo KA′B igual al rectilíneo correspondiente al diedro dado A, el plano que pase por las rectas A′K y SA será el del ángulo que se busca. Si volviéramos el *a* á su primitiva posicion, la arista SC″ se colocaria en el plano KA′S; pero durante el movimiento, el punto C″, determinado por la perpendicular BC″ á SB, describirá un arco de círculo de plano vertical, y cuya traza horizontal será la recta C″BA; luego se detendrá en la interseccion del plano de este arco con el KA′S. Pero esta interseccion contiene evidentemente al punto K, en que la vertical levantada en B encuentra á A′K; luego dicha interseccion es la recta que una K con A, de modo que será la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos serán BA y BK. Formarémos, pues, en los puntos B y A′ dos ángulos, uno recto y otro igual al rectilíneo correspondiente al diedro A, rebatirémos BK′ en BK″ sobre SB, y tirando AK″, tendrémos el rebatimiento de la interseccion del plano SA′K con el del arco descripto por C″, de modo que, describiendo desde B por centro la circunferencia $C''MM_1$, alguno de los dos puntos en que corte á AK″ será el rebatimiento de uno de los de la arista opuesta al ángulo plano *c*.

Si ahora hacemos que gire el plano del tercer ángulo alrededor de SA, como charnela, hasta rebatirle sobre ASB, las distancias que hay desde C, que supondrémos rebatido en M, á los puntos A y S de la charnela, no variarán; de modo que C vendrá á colocarse despues del giro en C′, interseccion de los arcos AM y SC″, y C′SA será el tercer ángulo plano correspondiente al punto M.

Del mismo modo hallariamos que C_1SA es el tercer ángulo plano correspondiente al punto M_1.

Se ve así que el problema admitirá, en general, dos soluciones. Sin embargo, cuando los dos puntos de interseccion de la recta AK″ con la circunferencia BC″ estuviesen colocados á diferente lado del A, solo habria una; porque, construyendo el triedro determinado por el punto de seccion situado á la izquierda de A, el diedro que tiene por arista á SA seria el suplemento de A. Si AK″ fuera tangente á la circunferencia, no habria mas que una solucion; y ninguna cuando esta recta no encontrara á la circunferencia.

Nótese que, volviendo el plano $C''MM_1$ á su posicion primitiva, los puntos M y M_1 se proyectarán en P y P_1; de suerte que, viniendo el tercer ángulo plano á colocarse sobre el plano ASB, los llevará á las prolongaciones de las perpendiculares bajadas á SA desde P y P_1; luego estas pasarán por los respectivos C′ y C_1, lo que suministra una comprobacion de que las construcciones están bien hechas.

Problema XV.

49. *Reducir un ángulo al horizonte.*

En la agrimensura se necesita muchas veces construir la proyeccion horizontal *acb* (fig. 29 dup.ª) del ángulo *asb* que forman dos rectas *sa* y *sb* inclinadas sobre el horizonte, y esto es lo que se pide en el enunciado de este problema.

Imaginando por el punto *s* de concurso una vertical, y midiendo los ángulos *asc* y *bsc* que forma con cada una de las rectas dadas se tendrá los tres ángulos planos de un triedro, á cuyo diedro *sc*, que tiene por arista la vertical, corresponde por ángulo rectilíneo la proyeccion horizontal *acb* del ángulo plano opuesto, esto es, del dado *asb*. Esta proyeccion se halla fácilmente (46).

Tambien se reduce un ángulo al horizonte del modo siguiente, que es muy sencillo:

Supongamos que SC represente la vertical, y SA y SB los dos lados del ángulo que se quiere reducir (fig. 29); trácense los B′SC, CSA, ASB″, iguales respectivamente á los tres observados, y levantese á la SC la perpendicular indefinida LT, que podrémos tomar por traza de un plano horizontal sobre el del ángulo vertical CSA. En el movimiento de rotacion de las dos caras alrededor de las charnelas SC y SA, las distancias de los puntos S, C y A de estas á la traza B de la tercera arista sobre este plano no habrán cambiado; luego SB′ y CB′ son estas dos primeras distancias; y si tomando SB″=SB′, unimos A con B″, la recta AB″ será la tercera, porque el triángulo ASB″ es evidentemente igual al ASB del espacio (G., 181). Luego, describiendo desde C y A por centros los arcos B′B y B″B, el triángulo ACB será igual al que forman las trazas de las caras del triedro S sobre el plano horizontal (G., 189); de modo que el ángulo B′CB será igual á la proyeccion horizontal del que se ha observado ASB, y por lo tanto, el mismo *reducido al horizonte.*

Si alguna de las rectas, SA por ejemplo (fig. 30), fuera horizontal, no se podria efectuar la construccion precedente. Pero aun en este caso, hagamos los ángulos CSB′, CSA y ASB″ respectivamente iguales á los tres que se han medido, tírese el plano horizontal LT, y la traza horizontal de la recta SB tambien tendrá que hallarse sobre el arco que tiene CB′ por radio. Bajo este supuesto, concíbase que desde B, donde este lado del ángulo que se quiere reducir atraviesa al plano horizontal LT, se ha bajado á SA una perpendicular, y se formará un triángulo rectángulo, que puede construirse, tomando SB″=SB′, y tirando la vertical B″A. Pero si le restituimos á su primitiva posicion, haciéndole que gire alrededor de SA, vendrá B″ á colocarse en la prolongacion de la vertical B″A, y por consiguiente en B, que es donde corta al arco BB′; luego B′CB es el ángulo que se pedia.

§ IV.—Problemas de planos tangentes.

Problema XVI.

50. *Tirar un plano tangente á una superficie cónica por un punto dado sobre ella* (fig. 31).

Considerarémos que la superficie cónica está determinada por su traza horizontal ACBD, que supondrémos en este caso que es una circunferencia de círculo, y por las proyecciones S y S′ de su vértice. Esto basta para determinarla, porque con tales datos podemos construir cualquiera generatriz que queramos, para lo cual no habrá mas que unir el vértice con el punto correspondiente de la curva ACBD

Bajo esta hipótesis, si por S tiramos dos tangentes SA y SB á la circunferencia ACBD, y concebimos que dos planos pasen por estas y por el vértice del cono, estos serán tangentes á la superficie, porque contendrán además á las generatrices que pasan por A y B (G., 535); pero son verticales; luego las tangentes SA y SB serán los límites de la proyeccion horizontal de la superficie cónica; porque es evidente que todas las demás generatrices han de proyectarse entre estas dos líneas ([1]).

Del mismo modo veríamos que, si tiramos á la circunferencia ACBD dos tangentes perpendiculares á la línea de tierra, las proyecciones verticales S′C′ y S′D′ de las generatrices correspondientes á los puntos C y D serán los límites de la proyeccion vertical de la misma superficie ([2]).

Supongamos que el punto por el que se quiere tirar el plano tangente esté dado por su proyeccion horizontal M: lo primero que hace falta buscar es su proyeccion vertical. Para conseguirlo, observarémos que la generatriz sobre la que se halla aquel punto se proyecta horizontalmente en SM; luego su traza puede ser E ó F, y dicho punto pertenece á la generatriz que tiene su proyeccion vertical en S′E′ ó á la que la tiene en S′F′; luego la del punto es M′ ó M″ (6). Por consiguiente, hay dos puntos (M, M′) y (M, M″), que se proyectan horizontalmente en M.

Propongámonos tirar el plano tangente por el primero. Su traza horizontal será la tangente PQ á la circunferencia ABCD, y como debe él contener la generatriz (SE, S′E′), quedará determinada su traza vertical uniendo el punto Q con el (G, G′) en que esta generatriz corta al plano vertical.

Si (G, G′) saliese fuera del papel, se tirará por (M, M′) una paralela (MI, M′I′) á la traza horizontal del plano tangente, y uniendo Q con el punto I′, se tendria la traza vertical de este plano, porque este debe contener á la recta auxiliar que hemos tirado. Aun cuando (G, G′) caiga dentro del papel, es bueno hacer la construccion anterior, que nos dará una comprobacion de las que llevamos hechas.

Análogamente se construiria el plano tangente en el punto (M, M″),

---

([1]) De esto se deduce que, para un espectador colocado á una distancia infinita sobre el plano horizontal, las generatrices que terminen en la parte BCA de la circunferencia, son las únicas *visibles*.

([2]) Por lo tanto, las generatrices que terminen en la semi-circunferencia CBD, serán *invisibles* para todo espectador que esté colocado á una distancia infinita del plano vertical.

y como los PQR y P′Q′R′ contienen una generatriz cada uno, pasarán ambos por (S, S′); de modo que las proyecciones de su interseccion pasarán, la una por S, y la otra por S′, y esto nos dará una comprobacion de todas las construcciones.

PROBLEMA XVII.

51. *Tirar un plano tangente á una superficie cónica por un punto dado fuera de ella.*

Habiendo de contener este plano á una de las generatrices, pasará necesariamente por el vértice; así que, uniendo este con el punto dado, y hallando las trazas de la recta que resulte, se tendrán dos puntos de las del plano tangente; mas la horizontal ha de ser tangente á la base del cono; luego la tenemos determinada, y por lo tanto, tambien la vertical.

PROBLEMA XVIII.

52. *Tirar un plano tangente á una superficie cónica que sea paralela á una recta dada.*

Toda paralela á la recta que se da, tirada por este, como ha de pasar por el vértice, tiene que hallarse en él; por lo tanto las trazas de aquella se hallarán sobre las de este, y como la horizontal ha de ser tangente á la base del cono, se la tiene determinada, y lo mismo la vertical.

PROBLEMA XIX.

53. *Tirar un plano tangente á una superficie cilíndrica: 1.° por un punto dado en ella* (por una de sus proyecciones); 2.° *por uno fuera de ella;* 3.° *que sea paralelo á una recta dada.*

Como toda superficie cilíndrica se puede considerar como una cónica cuyo vértice se haya alejado al infinito, las soluciones del problema que nos ocupa no son mas que casos particulares de los análogos que acabamos de resolver. Nada mas observarémos que, en el tercer caso, la paralela á la recta dada que se tira por el centro de la superficie cónica está completamente indeterminada, por lo que habrá que tirar por un punto de aquella recta una paralela á las generatrices de la superficie cilíndrica cuya direccion es uno de los datos del problema: el plano que determinen estas dos rectas será paralelo al tangente (G., 461); de modo que la traza horizontal de este último será paralela á la del auxiliar y tocará á la base del cilindro. Queda así determinada, y lo mismo la vertical.

Aconsejamos á los lectores que ejecuten los problemas XVII, XVIII, XIX repetidas veces, variando los datos, y que se acostumbren á determinar las generatrices límites de las proyecciones horizontal y vertical de la superficie, sea cónica ó cilíndrica, con lo cual distinguirán perfectamente las partes visibles de las que no lo son.

Problema XX.

54. *Tirar un plano tangente á una superficie de revolucion por un punto dado en ella* (fig. 32).

Para mayor sencillez tomarémos por plano horizontal uno que sea perpendicular al eje de revolucion, y en este supuesto, tendrémos determinada la superficie por la traza horizontal O de este eje, y por la proyeccion vertical A′B′C′D′ de la interseccion de aquella con un plano paralelo al vertical; proyeccion que será igual á la interseccion misma. Con efecto, la proyeccion de un polígono sobre un plano paralelo al suyo es igual al mismo polígono; y siendo esto cierto, independientemente de la magnitud de sus lados y ángulos, tambien lo será cuando el polígono degenere en una curva. Tiremos á la A′B′C′D′, que supondrémos que sea una elipse (G., 724), dos tangentes EB′ y FD′ perpendiculares á LT (G., 744, 3.°), cuyas prolongaciones tambien tocarán á la circunferencia que tiene por centro O y por radio O′B′. Esta circunferencia será el límite de la proyeccion horizontal de la superficie, lo mismo que A′B′C′D′ lo será de la vertical.

En este supuesto, sea M la proyeccion horizontal del punto dado. La traza del plano del meridiano sobre el cual esté colocado, será la recta OM. Supongamos que se hace girar este alrededor del eje hasta que quede paralelo al vertical de proyeccion; entonces se proyectará el meridiano en A′B′C′D′, y como M habrá descripto en este movimiento un arco MN, tendrá por proyeccion vertical uno de los dos puntos N′ ó N″ en que la NN′N″, perpendicular á LT, corta á A′B′C′D′. Pero, si volviéramos el meridiano á su posicion primitiva, el punto que se busca describiria un arco de círculo que, por ser horizontal su plano, se proyectará verticalmente en una paralela á LT tirada por N′ ó N″; luego, finalmente, la proyeccion vertical del punto de que se trata será uno de los dos M′ ó M″. Por consiguiente, hay dos (M, M′) y (M, M″) que tienen una misma proyeccion horizontal M.

Propongámonos tirar el plano tangente por el punto (M, M′). Quedará determinado por las tangentes que se tiren por este punto al meridiano y paralelo que pasan por el mismo (G., 516), y sus trazas lo estarán por las de estas rectas.

Siendo la proyeccion horizontal del paralelo la circunferencia MN, su tangente en (M, M′) se proyectará horizontalmente en la MG, que lo es á la dicha circunferencia ([1]), y verticalmente en N′M′, traza vertical de su plano; luego la de dicha tangente será G′.

Para construir la tangente al meridiano en el punto (M, M′), hago que su plano quede paralelo al vertical de proyeccion. Entonces (M, M′) se colocará en (N, N′); la tangente en este punto tendrá por proyeccion vertical la N′H′ (G., 744, 1.°), que lo será á la curva A′B′C′D′, y por horizontal la recta BD, de modo que su traza horizontal será ahora H. Pero al volver el meridiano á su antigua posicion, H se colocará en I, describiendo para ello el arco HI, y la tangente, cortando al plano horizontal en I, y pasando por (M, M′), tendrá por proyecciones MI y M′I′.

Queda así determinado el plano tangente, porque, habiendo de ser perpendicular al meridiano (G., 519), debe tener su traza horizontal perpendicular á este plano (G., 484). Por consiguiente, se tirará por I una que lo sea á la traza OI de este, y se unirá en seguida el punto en que corte á la línea de tierra con el G′.

Para tener una comprobacion de las construcciones precedentes, no hay mas que buscar la traza vertical de la tangente (MI, M′I′) al meridiano, y deberá encontrarse sobre la del plano tangente.

Observando que las rectas N′H′ y M′I′ se cortan en un mismo punto de OO′ (porque en el movimiento no ha dejado de cortar la tangente (NH, N′H′) al eje en un mismo punto), verémos que el plano tangente debe pasar por (O, K′); de lo que deducimos que, uniendo K′ con P′, pié de la perpendicular bajada á LT desde P, la K′P′ que resulta será la proyeccion vertical de la interseccion de

---

([1]) *Proyectando en un mismo plano, en el horizontal por ejemplo, una curva* CMB (G., fig. 233) *y su tangente* MT, *las proyecciones serán tambien tangentes.* Porque, haciendo pasar por la curva y la tangente un cilindro y un plano verticales, sus trazas C′M′B′ y M′T′ sobre el de proyeccion serán las proyecciones respectivas de la curva y su tangente. Pero como el plano vertical lo es al cilindro (G., 515), debe contener la tangente tirada por M′ á C′M′B′; luego esta, que tambien debe hallarse en el plano de proyeccion de la curva, no es otra que la M′T′.

este plano con el vertical OP; luego deberá ser paralela á la traza vertical del plano tangente; lo que nos suministra una nueva comprobacion.

Por último, tengamos presente que las normales (G., 527) tiradas por todos los puntos de un paralelo, cortan en uno mismo al eje de revolucion; porque si en el plano de un meridiano CMD (G., fig. 227) se levanta una perpendicular ME á la tangente MT á esta curva, será la normal á la superficie en el punto M (G., 482) y perpendicular á la tangente VM al paralelo MM'Q; pero cuando el meridiano CMD gire alrededor de CD, M describirá este paralelo, y ME no cesará de ser perpendicular á las dos tangentes MT y MV, y por consiguiente, normal á la superficie de revolucion.

De aquí se deduce que, tirando por el punto N' la perpendicular N'Q' á la tangente N'H', y uniendo Q' con M', la Q'M' será proyeccion vertical de la normal en el punto (M, M'), y por consiguiente, habrá de ser perpendicular á la traza vertical del plano tangente (G., 492); lo que nos da todavía otra comprobacion muy sencilla.

Repitiendo para el punto (M, M″) las construcciones que hemos ejecutado para el (M, M'), tendrémos las trazas del plano tangente en este punto; y la simetría de la figura manifiesta claramente que el punto de interseccion de las trazas verticales de ambos planos, lo mismo que aquellos en que se cruzan las proyecciones verticales de los tangentes en los puntos (N, N') y (N, N″), (M, M') y (M, M″) estarán situados en la recta B'D'.

PROBLEMA XXI.

55. *Tirar un plano tangente á una esfera por una recta dada.*

Si desde un punto A (G., fig. 63) se tira una tangente AT á una circunferencia, y en seguida se hace que gire toda la figura alrededor del diámetro AO, es evidente que AT describirá una superficie cónica circunscripta á la esfera que engendre el semi-círculo BTC; así como que la *curva de contacto* será una circunferencia, que tendrá por centro el pié de la perpendicular bajada desde T á AO, por radio esta perpendicular, y su plano perpendicular á la misma AO. Además, todo plano tangente á este cono lo será á la esfera, porque contendrá dos rectas que lo serán á esta superficie, á saber, una generatriz del cono, y una tangente á la curva de contacto.

Establecidos estos principios, supondrémos que los dos planos de proyeccion pasen por el centro de la esfera, con lo cual el rebatimiento de la traza vertical de dicha superficie coincidirá con la horizontal (fig. 39); y bastará, para resolver el problema, que concibamos un cono circunscripto á la esfera, cuyo vértice sea uno de los puntos de (AB, A'B'), y que en seguida por esta recta le tiremos un plano tangente.

Ahora bien, tomando para dicho vértice la traza horizontal de la recta (AB, A'B'), las generatrices horizontales de la superficie serán las tangentes AC y AD á la circunferencia; de modo que su línea de contacto con la esfera será la circunferencia descripta sobre CD como diámetro en el plano vertical CD; luego los puntos en que toquen á la superficie los planos tangentes que buscamos, serán dos de esta circunferencia. Pero repitiendo para la traza vertical (B, B') de la recta dada la misma construccion que para (A, A'), tendrémos una segunda curva en que tambien deberán hallarse los puntos de contacto, y por consiguiente, quedarán determinados.

Para obtenerlos, observo primeramente que la recta que une estos puntos tiene por proyeccion horizontal CD, y por vertical F'E', de modo que corta á los planos de proyeccion en I y G'; pero si rebatimos el vertical del círculo CD sobre el horizontal, haciendo que gire alrededor de CD, G' se colocará en G'' sobre una perpendicular á CD y á una distancia de G igual á GG'; mas el punto I no habrá variado, luego la *cuerda de contacto* se habrá rebatido en IG'', y por consiguiente, sus estremidades, esto es, los puntos de contacto, se hallarán en las intersecciones de esta recta con la circunferencia CD en *m* y *n*. Para tener las proyecciones de estos puntos, vuelvo á colocar el plano movible en su antigua posicion, y cuando esto haya sucedido, *m* y *n* se proyectarán horizontalmente en M y N, piés de las perpendiculares bajadas desde *m* y *n* sobre el eje de rotacion CD; luego sus proyecciones verticales son los puntos M' y N', en que las perpendiculares MM' y NN' á LT encuentran á E'F', de modo que, para acabar de resolver el problema, solo falta hacer que pasen planos por la recta (AB, A'B') y cada uno de los puntos (M, M') y (N, N'); pero teniendo que ser el tangente á la esfera perpendicular al radio que va al punto de contacto, será mas sencillo construir las proyecciones de los radios tirados á cada uno de estos, y bajar en seguida por A' y B' perpendiculares á las mismas proyecciones. Servirá de comprobacion el que las dos trazas de cada plano se han de cortar en un mismo punto de la línea de tierra.

§ V.—Problemas de interseccion de superficies.

56. Cuando se conoce el modo con que dos superficies curvas están engendradas con tal claridad que se pueda determinar completamente la série de puntos del espacio por los cuales pasen aquellas, tambien lo está de una manera absoluta la posicion de todos los que pueden serles comunes. Estos forman, por lo general, una cierta *curva*, que las mas veces es de *doble curvatura* (G., **524**), nombre que recibe por la circunstancia de que ordinariamente participa de la curvatura de ambas superficies, sobre las cuales existe á un mismo tiempo, y á las que sirve de mútua interseccion. Solo en un corto número de casos puede hallarse en un mismo plano esta série de puntos comunes á ambas, y no tener mas que una curvatura (por ejemplo de interseccion de dos esferas); ó reducirse á una recta, y no tener curvatura alguna (interseccion de dos superficies cónicas que tengan comunes el vértice y una generatriz); ó finalmente, á un solo punto (interseccion de dos superficies cónicas que solo tengan comun el vértice).

57. Propongámonos la resolucion general del siguiente

Problema.

Conociendo las leyes de generacion de dos superficies curvas S *y* Σ, *y estando determinados en los planos de proyeccion todos los datos que fijan la generacion de las mismas, construir la curva de doble curvatura en que se corten.*

Concibiendo una série de planos indefinidos P, Q, R.... colocados en el espacio de una manera convenida, y suponiéndolos, por ejemplo, horizontales, sus trazas sobre el vertical de proyeccion serán paralelas á la línea de tierra p', q', r'..... indefinidas. Fijemos la consideracion en uno de estos planos, el P por ejemplo, y verémos que cortará á la primera superficie S por una curva A que siempre será posible construir por puntos; porque es la série de todos aquellos en que las diversas posiciones de la generatriz cortan al plano horizontal P. Siendo esta curva plana y horizontal, tendrá por proyeccion del mismo nombre otra igual á ella misma y colocada del mismo modo, que será fácil construir, y llamarémos a.

El mismo plano P cortará tambien á la segunda superficie Σ por otra curva plana horizontal B, cuya proyeccion horizontal b será igualmente fácil construir.

Ahora puede suceder que las dos curvas A y B en que el plano P ha cortado á las dos superficies, se corten ellas mismas, ó no. Si no se cortan, será una prueba de que las dos superficies S y Σ no tienen ningun punto comun á la altura del plano P; mas si se cortan, será en cierto número de puntos, que pertenecerán á las dos superficies, y serán, por lo mismo, otros tantos de la interseccion que se busca. Pero las proyecciones horizontales de los puntos en que se corten las dos curvas A y B deben estar á un mismo tiempo en las a y b de estas; luego los m, n..... comunes á a y b, serán las de otros tantos M, N..... de la interseccion que se busca de S y Σ. Para tener las verticales de estos mismos puntos, observarémos que están todos situados en el plano horizontal P, y que, por consiguiente, sus proyecciones verticales pertenecen á la traza p' de este plano; luego bastará para obtenerlas proyectar los m, n.... sobre p'.

Repitiendo la misma operacion para cada uno de los planos Q, R, etc., se tendrán semejantemente las proyecciones horizontales y verticales de otros nuevos puntos de la interseccion pedida, y no habrá mas que unir por una línea continua las proyecciones horizontales de todos estos puntos, y por otra los verticales de los mismos, y se tendrán dos curvas, que serán, la una la proyeccion horizontal, y la otra la vertical de la interseccion de las dos superficies.

58. El método que acabamos de esponer es general, aun cuando hayamos supuesto que todos los planos secantes eran horizontales. Sin embargo, la eleccion de estos no es siempre indiferente, como tendrémos ocasion de ver mas adelante en la solucion de algunos problemas; y aun puede ofrecer ventajas el emplear, en vez de un sistema de planos, otro de superficies curvas, que solo se diferencien unas de otras por alguna de sus dimensiones.

59. El segundo problema general que hay que resolver es el siguiente:

Tirar una tangente á la comun interseccion de dos superficies curvas por un punto tomado arbitrariamente sobre ella.

Como este punto que se toma está al mismo tiempo sobre ambas superficies, si por él, como perteneciente á la primera, se tira un plano tangente á la misma, este contendrá la tangente á la curva de interseccion en el mismo punto (G., 515). Igualmente, considerando que dicho punto pertenece á la segunda superficie, y tirando por él un plano tangente á la misma, en este se hallará tambien la tangente buscada; luego habiendo de hallarse esta en los dos planos tangentes que hemos tirado por el mismo punto á cada superficie, será la interseccion de ambos bien fácil de construir.

60. Ahora vamos á hacer aplicacion de las consideraciones precedentes á algunos casos particulares; y supondrémos que una de las superficies cuya interseccion se pide sea un plano.

Problema XXII.

61. *Construir la interseccion de un cilindro recto y vertical con un plano perpendicular al vertical de proyeccion.—Tirar la tangente á la curva de interseccion.—Desarrollar la superficie cilíndrica y llevar sobre el desarrollo la curva de interseccion y su tangente.*

Sean PQ, QR′ (fig. 33) las trazas horizontal y vertical del plano secante, de las que la primera será perpendicular á la línea de tierra, porque suponemos que este plano lo es al vertical de proyeccion; y ABCD la traza horizontal de la superficie cilíndrica. Tirándole las dos tangentes indefinidas AaA', CcC', perpendiculares á LT, serán aA' y cC' las proyecciones verticales de las generatrices estremas, y los puntos A′ y C′ en que corten á la traza vertical QR′ del plano secante, los límites de la misma proyeccion A′C′ de la interseccion buscada, que tendrá además por la horizontal á la traza ABCD de la superficie cilíndrica.

Propongámonos ahora construir en un plano esta interseccion tal como existe, para lo que bastará hacer girar al PQR′, que la contiene, alrededor de su traza vertical QR′ como charnela, hasta rebatirle sobre el vertical de proyeccion. Concibamos una série de otros tambien verticales, y perpendiculares al de proyeccion por los puntos M, N..... tomados á arbitrio en ABCD, cuyas trazas horizontales y verticales serán á la vez las $M\mu mM'$, $N\nu nN'$..... perpendiculares á LT. Cada uno de ellos, el $M\mu mM'$ por ejemplo, cortará al secante por una recta horizontal (Mm, M') perpendicular á la charnela, que encontrará á esta en M′, y á la curva pedida en puntos cuyas proyecciones horizontales serán las intersecciones M y μ de Mm con ABCD, y que se proyectará horizontalmente, lo mismo que cualquier parte suya, en su verdadera longitud. Pero cuando el plano secante gire alrededor de QR′ para rebatirle en el vertical de proyeccion, las rectas, como (Mm, M'), que eran desde el principio horizontales, seguirán siendo perpendiculares á QR′; luego, si por A′, M′, N′.... C′ se tiran á esta perpendiculares indefinidas, y sobre ellas se toman las distancias $A'A''=aA$, $M'M''=mM$ y $M'\mu''=m\mu$,

$N'N''=nN$ y $N'\nu''=n\nu$.... $C'C''=cC$, se tendrá tantos puntos como se quiera de la curva de interseccion $A''M''N''C''\nu''\mu''$.

Supongamos que despues de construida esta en su plano, se la quiera tirar una tangente por uno de sus puntos M″. Claro es que la proyeccion vertical M′ de este se tendrá bajando desde M″ sobre QR′ una perpendicular, y la horizontal M, proyectando M′ en M sobre ABCD, y que la horizontal de la tangente pedida será MV, que toca en M á la curva ABCD (54, *nota* 1) y la vertical QR′. Para tener esta tangente en el plano de la curva, construyo su traza vertical V′, y observo que en el movimiento de rotacion del plano PQR′ alrededor de QR′ ha quedado V′ inmóvil por hallarse en la charnela, y que bastará tirar V′M″ para tener la tangente pedida V′M″V″ en el punto M″. Tambien se hubiera podido tomar un punto cualquiera (K, N′) de la tangente, rebatirle en K″ sobre el plano de la curva, y unirle con M″.

Puede ocurrir que se necesite tener sobre el desarrollo de la superficie cilíndrica la traza causada por el plano secante. Para esto, considerarémos que se abre el cilindro por una de sus generatrices, tal como (A, aA'), y que se desarrolla su superficie sobre el plano que es tangente á lo largo de la (M, mM'), y como no cabe duda de que la curva ABCD se transformará en una recta, tómense sobre una indefinida XY (fig. 33 duplicada), las distancias M_1A_1, M_1N_1, N_1D_1..... μ_1A_2 iguales respectivamente á los arcos MA, MN, ND... μA, levántense por los puntos A_1, M_1, N_1... A_2 perpendiculares, y tómense sobre estas las partes de las generatrices correspondientes del cilindro; pero como estas partes son iguales á las de sus proyecciones verticales comprendidas entre LT y A′C′, se tomará $A_1A''_1 = aA'$, $M_1M''_1 = mM'$.... $A_2A''_2 = aA'$, y la série de los puntos A''_1, M''_1, N''_1..... A''_2 será la curva buscada, ó sea la *transformada* de la interseccion. Es además evidente que, tomando una distancia $M_1U_1 = MU$, y tirando M''_1U_1, esta será la tangente á la transformada en el punto M''_1: consecuencia que subsiste cierta, cualquiera que sea el plano tangente sobre el que se desarrolle el cilindro, porque, al verificarse el desarrollo, los elementos curvilíneos, y por consiguiente las tangentes, conservan la misma inclinacion sobre el plano horizontal.

Problema XXIII.

62. *Construir la interseccion de una superficie cónica, cualquiera que sea su base, con un plano perpendicular á uno de los de proyec-*

cion. — Tirar una tangente á esta curva. — Desarrollar la superficie cónica, en caso de que sea circular y recta; y llevar sobre el desarrollo la curva de interseccion y su tangente.

Sean S y S′ (fig. 34) las proyecciones del vértice del cono, y ABCD la traza de su superficie sobre el plano horizontal. Tirando las tangentes A*a*, C*c* perpendiculares á LT, se tendrán las generatrices estremas (AS, *a*S′) y (CS, *c*S′).

Supondrémos desde luego que el plano PQR′ es perpendicular al vertical de proyeccion, al cual tirarémos por el vértice del cono una série de otros que todos le sean perpendiculares, tales como S′*e*E, S′*g*G..... Consideremos uno de estos, S′*e*E, por ejemplo; cortará á la superficie por dos generatrices, que tendrán ambas por proyeccion vertical la traza S′*e* de este plano, y por horizontales las rectas SE, SF que unen el punto S con los E y F, en que la traza horizontal E*e* del plano corta á la base del cono. El mismo S′*e*E cortará al secante PQR′ por una horizontal, cuya traza vertical será M′ y la proyeccion horizontal M*m*. Por consiguiente, los puntos de interseccion M y μ de SE y SF con M*m* serán las proyecciones horizontales de dos puntos de la interseccion que se busca, los cuales se proyectarán verticalmente en M′. Cada uno de los demás planos S′*g*G..... servirá igualmente para determinar nuevos puntos de la proyeccion horizontal de la interseccion, y uniendo por una línea seguida todos los así obtenidos, resultará que αMN$\gamma\nu\mu$ es esta proyeccion horizontal.

Si por un punto (M, M′) de la interseccion se la quisiera tirar una tangente, observaríamos que esta se halla en el plano que toca al cono á lo largo de la generatriz (SE, S′*e*) tirada por dicho punto, y que tiene por traza horizontal la tangente EU en el punto E; se halla tambien en el secante PQR′: luego su traza horizontal será el punto U que tengan comun las de ambos planos, y tirando UM, esta será la proyeccion horizontal.

Para construir la curva de interseccion en su mismo plano, no hay mas que operar como en el problema anterior, esto es, rebatir el PQR′ sobre el vertical de proyeccion, haciéndole que gire alrededor de su traza vertical QR′ por charnela, y construir así la curva $\alpha''\mu''\nu''\gamma''$N″M″. Tambien es fácil tirarle una tangente por uno de sus puntos M″, para lo cual basta rebatir este punto en M′, tirar la S′ M′ prolongada hasta que encuentre en *e* á la línea de tierra, proyectar *e* en E sobre la traza horizontal del cono, y tirar por E la tangente EU: solo faltará tomar QU″=QU y tirar la U″M″.

Obsérvese que para nada de cuanto dejamos dicho es necesario que el cono sea recto ni de base circular, y que, por consiguiente, es todo aplicable á cualquiera superficie cónica.

Propongámonos ahora efectuar el desarrollo de esta, *en el caso de que sea circular y recta*, como lo hemos supuesto en la figura 34, y trazar sobre él la *transformada* de la interseccion. El desarrollo de esta superficie será (G., 538) el sector $S_1A_1C_1A_2$ (fig. 34 duplicada), cuyo radio es S_1A_1 igual á la generatriz $S'a$ y la base $A_1C_1A_2$, de igual longitud que la circunferencia ABCD de la base del cono. Para construir la posicion de un punto de la interseccion del (M, M′), por ejemplo, tómese el arco $A_1E_1 = AE$, tírese S_1E_1, que será evidentemente la posicion que ocupe la generatriz (SE, $S'e$) sobre la cual está (M, M′), y no habrá mas que tomar sobre ella, á partir de S_1, una longitud $S_1M''_1$ igual á la distancia que hay desde (M, M′) al vértice (S, S′) del cono, cuya distancia se tendrá tirando por M′ (fig. 34) una paralela á la línea de tierra hasta que encuentre en M‴ á $S'e$. Construyendo del mismo modo todos los demás puntos de la interseccion, y uniéndolos por medio de una curva, se tendrá la transformada $\alpha''_1M''_1\delta''_1\alpha''_2$ de la interseccion sobre el desarrollo de la superficie cónica. Es fácil de comprender que, tirando en E_1 una tangente al arco $A_1C_1A_2$, tomando en ella una longitud $E_1U_1 = EU$, y uniendo U_1 con M''_1, la $U_1M''_1$ será tangente á la transformada en el punto M''_1.

Si el plano secante fuese perpendicular al horizontal de proyeccion, se haria pasar por el vértice del cono una série de otros tambien perpendiculares al horizontal, cuyas trazas sobre este último serian rectas bajadas todas desde S; y por cada uno de estos planos se construirian los puntos de interseccion de la vertical en la que él corta al secante con las generatrices en que lo hace á la superficie cónica.

Problema XXIV.

63. *Construir la* SECCION RECTA *de un cilindro oblícuo* (así se llama la curva de interseccion de este con un plano perpendicular á las generatrices).—*Tirar una tangente á esta curva.—Desarrollar la superficie cilíndrica, y llevar sobre el desarrollo la curva que servia de base y las tangentes.*

Sea ABCD (fig. 35) la traza horizontal del cilindro, IK é I′K′ las proyecciones de la recta á que son paralelas las generatrices, y

PQR′ el plano secante, cuyas trazas horizontal y vertical serán respectivamente perpendiculares á IK é I′K′ (G., 485 y 486).

Concibamos una série de planos paralelos á las generatrices y perpendiculares además al horizontal de proyeccion; sus trazas sobre este *pq*, *rs*... serán paralelas á IK. Cortarán á la superficie por generatrices, cuyas trazas horizontales serán los puntos E y F, G y H... de interseccion de *pq*, *rs*... con la curva ABCD; por lo que, bajando las perpendiculares E*e* y F*f*, G*g* y H*h*... á LT, y tirando las *ee′* y *ff′*, *gg′* y *hh′*... paralelas á I′K′, se tendrán las proyecciones verticales de estas generatrices.

Estos mismos planos cortarán al secante PQR′ por rectas que serán todas paralelas entre sí (G., 454), que tendrán sus trazas horizontales en los puntos X, Y..., y cuyas proyecciones verticales serán tambien paralelas. No habrá mas que buscar la direccion de una de estas proyecciones, por ejemplo, la de la interseccion de PQR′ con el plano vertical tirado por IK, cosa bien fácil (18), y sea *jZ′*; bajando desde los puntos X, Y... perpendiculares X*x*, Y*y*... á LT, y tirando las *xx′*, *yy′*... paralelas á *jZ′*, tendrémos las proyecciones verticales de las intersecciones de PQR′ con todos los secantes. Finalmente, los puntos M′ y μ′, N′ y ν′,... de interseccion de *xx′*, con *ee′* y *ff′*, de *yy′* con *gg′* y *hh′*, etc., serán las de otros tantos puntos de la seccion recta del cilindro, y uniéndolos por una línea seguida se tendrá la de dicha seccion. Las proyecciones horizontales M y μ, N y ν... de los mismos puntos se hallarán proyectando M′ y μ′ sobre *pq*, N′ y ν′ sobre *rs*... etc., y el conjunto de los M, μ, N, ν... formará la de la misma curva.

Para tirar la tangente en (M, M′) á la interseccion, se recordará (59) que ha de ser interseccion del plano PQR′ con el tangente al cilindro á lo largo de la generatriz (*p*E, *ee′*) en que está situado dicho punto. Pero la traza horizontal del segundo es la tangente UE tirada á la base en E; luego la de la tangente que se busca está en U, punto de interseccion de UE con PQ. Por consiguiente, UM y *u*M′ serán las proyecciones horizontal y vertical de la tangente pedida; y tocarán en M y M′ á las curvas MμνN y M′μ′ν′N′ (54, *nota* [1])).

Pasemos ya á construir la interseccion, tal como está en su plano; para lo cual hago girar á este alrededor de su traza horizontal PQ, en cuyo movimiento, cada punto de la curva, el (M, M′) por ejemplo, describirá un arco de círculo de plano vertical, perpendicular á PQ, y que tendrá por traza horizontal á *pq*; luego, cuando se haya rebatido, aquel punto tendrá que ser alguno de los de *pq*, y su distancia á la charnela será la hipotenusa de un triángulo rectángulo que tendrá por base MX, y por altura mM'. Por lo tanto, se tomará sobre la línea de tierra una longitud mX'=MX, se unirá M' con X', y tomando sobre pq, M''X=M'X', se tendrá M'' rebatimiento de (M, M'). La curva M''$\mu''\nu''$N'' que se construya de este modo será la pedida. Para tener su tangente en M'', es claro que bastará tirar la UM''; porque, en el movimiento de rotacion del plano secante, la tangente á la curva pasa constantemente por el punto U de la charnela.

Supongamos ahora que se quiere construir el desarrollo de la parte de superficie cilíndrica comprendida entre el plano PQR' y el horizontal de proyeccion. Claro es que la seccion recta se transformará en una línea recta de igual longitud que la curva M''$\mu''\nu''$N'', y á la cual serán perpendiculares todas las generatrices. Por consiguiente, sobre una línea indefinida (fig. 35 dup.ª), llevo las longitudes α''_1M''$_1$, M''$_1\delta''_1$... N''$_1\alpha''_2$, iguales respectivamente á los arcos α''M'', M''δ'',... N''α'' de la curva M''$\mu''\nu''$N'', y en los puntos α''_1, M''$_1$, δ''_1,... levanto perpendiculares, que serán las posiciones que tomarán en el desarrollo las generatrices que tienen por trazas horizontales A, E, D,... No habrá ya mas que tomar sobre estas perpendiculares distancias iguales á las partes de las generatrices que estén comprendidas entre los puntos (α, α') y (A, a), (M, M') y (E, e)..., cosa bien fácil, y tendrémos los puntos A$_1$, E$_1$, D$_1$,... cuyo conjunto compone la transformada de la base ABCD del cilindro.

En este desarrollo, la tangente (UM, uM') en el punto (M, M') de la curva tendrá por transformada la línea indefinida $\alpha''_1\alpha''_2$, porque se encuentra en el plano perpendicular á las generatrices, y el punto U vendrá á U$_1$ á una distancia U$_1$M''$_1$=UM''. Uniendo U$_1$ con E$_1$, tendrémos la transformada de la tangente UE á la base del cilindro.

Hemos supuesto en la figura que esta base es una circunferencia; pero en nada altera cuanto dejamos dicho, si esta hubiera sido una curva cualquiera.

PROBLEMA XXV.

64. *Construir la curva de interseccion de una superficie de revolucion con un plano, y las tangentes á la misma.*

Tomarémos uno de los de proyeccion, el horizontal por ejemplo, perpendicularmente al eje de la superficie, el cual, por lo tanto, será vertical; la superficie estará además determinada por la proyeccion vertical de su meridiano, como en el problema XXI.

En este supuesto, concibamos una série de planos horizontales, cuyas trazas verticales serán paralelas á la línea de tierra. Siendo cada uno de ellos perpendicular al eje, cortará á la superficie por un paralelo, cuyo radio y proyeccion vertical se tendrá inmediatamente, y será por lo mismo fácil describir el círculo que le sirve de la horizontal. Estos planos cortarán además al secante en rectas cuyas proyecciones horizontales se tendrán fácilmente, por ser paralelas á la traza horizontal del plano secante. Los puntos en que la proyeccion horizontal de la interseccion de cada plano con el secante encuentre á la del paralelo correspondiente, serán las de los puntos de la interseccion que se busca; y las proyecciones verticales de estos se hallarán proyectándolos sobre la vertical del paralelo por medio de una perpendicular á la línea de tierra. Repitiendo esta construccion para cada plano secante horizontal, tendrémos nuevos puntos de la interseccion, y llegarémos á trazar las dos curvas en que se proyecta.

Si por el eje de la superficie se hiciera pasar un plano vertical perpendicular al secante, cortaria respectivamente á la superficie y á este en una meridiana y una recta, cuyos puntos comunes serian el mas alto y el mas bajo de la curva de interseccion respecto al horizontal. Construyamos, por lo tanto, aquel cuya traza horizontal sea la perpendicular tirada á la del plano secante por el punto en que el eje de revolucion corta al horizontal, y la vertical será perpendicular á la línea de tierra; y formemos tambien la proyeccion vertical de su interseccion con el plano secante. Los puntos en que esta interseccion encuentre á la superficie, se determinarán haciendo girar al plano del meridiano alrededor del eje y rebatiéndole sobre el vertical, como hicimos en el problema XXI.

Si se quiere tirar la tangente á la curva de interseccion por uno cualquiera de sus puntos, se observará que esta recta no es mas que la interseccion del plano secante y del que toca á la superficie en el punto dado (59); por consiguiente, se construirá este último (54), y el punto en que su traza horizontal encuentre á la del primero será la de la tangente.

En fin, para construir en su verdadera magnitud la curva de interseccion, tal cual está en su plano, se rebatirá este sobre el horizontal, haciéndole que gire alrededor de la traza como charnela.

Aconsejamos á los lectores que se propongan ejercicios de este problema, que no presenta dificultad despues de lo que dejamos dicho.

PROBLEMA XXVI.

65. *Construir la interseccion de dos superficies cónicas, cuales quiera que sean sus bases, y las tangentes á esta curva.*

Supondrémos que ambas están dadas por las proyecciones de sus vértices, y por sus trazas sobre el plano horizontal.

Si en la hipótesis de que pueden ser cualesquiera las bases de estas dos superficies, se empleara, segun lo hemos supuesto al esponer el método general (57), un sistema de planos secantes horizontales, nos meteriamos en operaciones demasiado complicadas; porque cada uno de ellos cortaria á las dos superficies por dos curvas que serian semejantes á las trazas horizontales de aquellas, pero de las cuales no es necesario construir por puntos las proyecciones en cada caso particular. Solo cuando las dos fueran de base circular y tuvieran los ejes paralelos entre sí, podria usarse un sistema de planos horizontales, porque las secciones causadas por cada uno en las dos serian entonces círculos fáciles de construir. Mas, en el caso general, será mejor suponer que pasa una recta por los dos vértices, y tirar por ella una série de planos, cuyas secciones con las superficies serán generatrices que se cortarán en puntos pertenecientes á la interseccion que se busca, y cuyas proyecciones horizontales y verticales estarán dadas por los de interseccion de las de estas generatrices.

Sean, pues, AEBH, CFDG (fig. 38) las trazas horizontales de las superficies dadas (S, S′) y (Σ, Σ′) sus vértices, por los que hago pasar una recta (SΣ, S′Σ′) cuya traza horizontal O construyo : todos los planos que pasen por ella lo harán tambien por O, por lo cual puedo hacer pasar por este punto una série de rectas, de las que cada una se podrá considerar como traza horizontal de un plano que pase por los vértices de las dos superficies.

El que tenga por traza OH por ejemplo, cortará á la primera superficie por la generatriz (SH, S′*h*), y á la segunda por las (ΣG, Σ′*g*) y (ΣF, Σ′*f*): los puntos M y N de encuentro de S*h* con ΣG y ΣF y los M′, N′ de S′*h* con Σ′*g* y Σ′*f* serán las respectivas proyecciones horizontales y verticales de otros tantos de la interseccion buscada. Repitiendo esta construccion para las demás rectas tiradas por O, se podrá determinar tantos puntos como se quiera de las curvas MN y M′N′, proyecciones horizontal y vertical de la interseccion de las dos superficies cónicas; y para comprobacion de cuanto llevamos hecho, deberán los puntos M y M′, N y N′ hallarse en una misma perpendicular á la línea de tierra.

Para tener las proyecciones de la tangente en el punto (M, M′), por ejemplo, de la curva de interseccion, observarémos que esta tangente ha de estar en los dos planos que toquen á las superficies en aquel punto, y que, por consiguiente, su traza horizontal es el comun á las de ambos planos. Pero la del que toca en (M, M′) á la primera superficie es la tangente UH á la curva AEBH en el (H, h) de la generatriz (SH, S′h): lo mismo que la del que toca á la segunda en (M, M′) será la UG tangente á CFDG en el punto (G, g) de la generatriz (ΣG, Σ′G′); luego U es la traza horizontal de la tangente que se pide; su proyeccion horizontal será UM, y la vertical se obtendrá proyectando U en u sobre la línea de tierra, y tirando uM′.

Problema XXVII.

66. *Construir la interseccion de dos superficies cilíndricas, cuyas bases pueden ser cualesquiera, y las tangentes á esta curva.*

Supondrémos que ambas estén determinadas por sus trazas horizontales y la direccion de sus generatrices.

El sistema de planos horizontales empleado en la esposicion del método general para hallar la interseccion de dos superficies (57), no seria el mas ventajoso para este caso. Es verdad que cada uno cortaria á las dos propuestas en curvas que, lo mismo que sus proyecciones horizontales, serian iguales á sus respectivas trazas sobre el plano horizontal; pero habria que construir estas proyecciones por puntos para tener los de su interseccion. Al contrario, eligiendo un sistema de planos paralelos al mismo tiempo á las generatrices de ambos cilindros, cada uno cortará á las superficies por medio de rectas, cuyos puntos comunes pertenecerán á la interseccion buscada, y cuyas proyecciones horizontales y verticales estarán dadas por simples intersecciones de rectas; por lo tanto, adoptarémos este procedimiento.

Sean, pues, ABCD, PQRS (fig. 36) las trazas horizontales que se dan de las dos superficies cilíndricas, así como (IK, I′K′), (HO, H′O′) las rectas que fijan las respectivas direcciones de sus generatrices. Construyo (14 y 17) la traza horizontal IO de un plano paralelo á la vez á estas dos rectas [1], despues trazo sobre el plano horizontal

[1] Por un punto cualquiera (I, I′) tomado en la primera (IK, I′K′) se tirará una paralela á la segunda; se construirá su traza horizontal O, que se unirá con la I de la primera.

una série de paralelas á IO, cada una de las cuales puede mirarse como traza de un plano paralelo á las generatrices de ambos cilindros. Sea AR una de estas; el plano á que pertenezca cortará á la primera superficie por las generatrices (AE, aE') y (CF, cF'), y á la segunda por las (PX, pX') y (RZ, rZ'); los puntos M, N, μ, ν en que AE y CF encuentran á PX y RZ, y los M', N', μ', ν' en que aE' y cF' lo hacen á las pX' y rZ', serán respectivamente proyecciones horizontales y verticales de otros tantos de la curva pedida. Se construirá así por puntos las MN$\mu\nu$ y M'N'$\mu'\nu'$ de la interseccion de las superficies cilíndricas; y, como comprobacion de las construcciones, los puntos M y M', N y N', μ y μ', ν y ν' han de hallarse en unas mismas perpendiculares á la línea de tierra.

Para tener la proyeccion de la tangente en un punto de esta curva, por ejemplo en (M, M'), se construirá la traza horizontal CU del plano tangente en este á la primera superficie cilíndrica, y la RU del que lo es á la segunda: el de su interseccion U será la horizontal de la tangente que se busca, cuya proyeccion sobre este plano será, por consiguiente, UMV, y la vertical se hallará proyectando U en u sobre la línea de tierra, y tirando UM'.

Problema XXVIII.

97. *Construir la interseccion de dos superficies de revolucion, cuyos ejes esten en un mismo plano, y las tangentes á esta curva.*

Distinguirémos dos casos: que los ejes de estas sean paralelos, ó que se encuentren.

1.° *Los ejes de las dos superficies son paralelos.* Tomando uno de los planos, por ejemplo el horizontal, perpendicular á los ejes, quedará cada superficie determinada por la proyeccion vertical de su meridiano y la traza horizontal de su eje. El sistema de planos secantes que preferirémos por mas ventajoso será el de horizontales; porque así, cada uno cortará á las dos superficies en paralelos, cuyos radios serán iguales á las distancias de la curva meridiana al eje, medidas á la altura del plano secante, y cuyas proyecciones horizontales serán, por consiguiente, círculos conocidos en magnitud y posicion. Todos los puntos de la proyeccion horizontal de la curva de interseccion quedarán conocidos por intersecciones de arcos de círculo; y proyectándolos sobre la traza vertical del paralelo correspondiente, por medio de una perpendicular á la línea de tierra, se tendrá la proyeccion vertical de la curva de interseccion de las superficies dadas.

2.° *Los dos ejes se cortan.* Tómese el plano horizontal, por ejemplo, perpendicular á uno de los ejes, y el vertical paralelo á estos dos; y en vez de planos secantes, adóptese un sistema de superficies esféricas que tengan por centro comun el punto de interseccion de los dos ejes. Cada una de estas cortará á las de revolucion propuestas en circunferencias cuyos centros estarán en los respectivos ejes, y cuyos planos serán perpendiculares al de estos: las trazas verticales de los primeros serán líneas rectas, sus puntos de interseccion proyecciones de los de la curva buscada. Para tener las proyecciones horizontales de los mismos, observarémos que el paralelo en que cada superficie esférica corta á aquella de las dadas cuyo eje es vertical, se proyecta horizontalmente en su verdadera magnitud en un círculo que se puede construir fácilmente; por lo tanto, bastará proyectar sobre cada uno de estos, por perpendiculares á la línea de tierra, todos los puntos correspondientes de la proyeccion vertical de la interseccion, y se tendrá la horizontal de esta curva.

Sean, pues, (A, A'*a*), (AB, A'*b*) (fig. 37) los ejes de dos superficies de revolucion, cuyas meridianas tienen por proyecciones verticales las respectivas curvas P'X'Q' y R'Z'S'. Desde A, A', en que sus ejes se encuentran, describo una série de superficies esféricas: cada una de ellas, como P'Q'R'S', corta á la primera de las dadas por un paralelo de plano perpendicular al vertical que tiene por traza sobre este á la línea P'Q', y á la segunda por otro cuyo plano igualmente perpendicular al vertical, tiene por traza en este la R'S': el punto M', en que se cortan P'Q' y R'S', es uno de la proyeccion vertical de la curva que se busca. Bajando desde M' á la línea de tierra una perpendicular M'*m*, que cortará en dos puntos M y μ á la circunferencia PMQ que proyecta horizontalmente y en su verdadera magnitud al paralelo P' Q' de la primera superficie, se tendrán dos puntos M y μ de la proyeccion horizontal de la curva en que se cortan las dos superficies, y de este modo se llegarán á construir las dos proyecciones de la misma.

Propongámonos ahora tirar una tangente á la interseccion en un punto, el (M, M') por ejemplo. Debiendo esta ser la interseccion de los planos tangentes tirados á las superficies por el mismo punto, tratemos de construirlos. Para tener el que toque á la superficie primera (54), tiro en Q' la tangente Q'H' al meridiano, proyecto H' en H sobre PQ, y rebato H en I sobre el radio AM: la IK, tangente al arco HI, será la traza horizontal del plano que buscamos, y la vertical J′KG′ se hallará uniendo K, ya sea con la traza vertical J′ de la tangente (MI, M′I′) al meridiano en (M, M′), ó ya con la vertical G′ de la tangente (MG, M′G′) al paralelo que pasa por el mismo punto.

Para construir el plano tangente en (M, M′) á la segunda superficie, cuyo eje no es perpendicular al horizontal de proyeccion, la referirémos á otro nuevo perpendicular á su eje, conservando el mismo el vertical. Sea, pues, L_1T_1 la nueva línea de tierra, B_1 la traza del eje de la segunda superficie, $R_1S_1M_1$ y M_1 las proyecciones del paralelo R′S′ y del punto (M, M′) sobre el plano vertical de proyeccion: podemos construir, como antes, la traza del plano tangente en (M_1, M′) sobre el vertical de proyeccion, y sea esta $K_1G'_1$. El punto de interseccion U′ de las trazas J′KG′ y G'_1K_1 será la traza vertical de la tangente á la interseccion en el punto (M, M′); de modo que, uniendo U′ con M′, U′M′V′ será la proyeccion vertical de la tangente: para hallar la horizontal, se proyectará U en *u* sobre la línea de tierra, y se unirá *u* con M.

§ IV.—Problemas diversos.

Problema XXIX.

68. *Circunscribir un círculo á un triángulo dado en el espacio por las proyecciones de sus vértices* (A, A′), (B, B′), (C, C′) (fig. 40).

Se hará pasar un plano PQR′ por estos tres puntos (17), que gire alrededor de su traza horizontal hasta que venga á colocarse sobre este, y se construirá el rebatimiento *abc* del triángulo formado en el espacio por los tres puntos. Para esto, bajarémos desde el D una perpendicular al eje de rotacion PQ; la cortarémos por un arco de círculo descripto desde Q por centro y con el radio QD′, y uniendo Q con D″, tendrémos el rebatimiento de la traza vertical del plano auxiliar; de modo que, uniendo D″ con la horizontal E de (BC, B′C′), D″E será el rebatimiento de esta recta. De una manera semejante determinarémos los rebatimientos F″G é I″H de las (AC, A′C′) y (AB, A′B′); y para comprobacion, los puntos *a* y A tienen que estar en una misma perpendicular á la línea PQ, como igualmente en otras los *b* y B, y los *c* y C. Bajo este supuesto, el centro *o* del círculo circunscripto al triángulo *abc* será el rebatimiento del centro del que se pide, que tendrá por lo mismo á *oa* por radio. Para determinar las proyecciones del centro de este círculo, vuelvo el plano auxiliar á su primitiva posicion, y el punto O describirá de este modo un arco cuyo plano tendrá por traza horizontal la perpendicular *o*O á PQ, por lo que su proyeccion horizontal se hallará sobre esta recta. Mas, por otra parte, uniendo *o* con *b*, la traza horizontal de la recta que resulte será K; de modo que sus proyecciones serán BK y B′K′; luego el centro que buscamos se proyectará sobre BK y B′K′, y por consiguiente, tendrá por proyeccion horizontal el punto O, interseccion de O*o* y BK, y por vertical el O′, que lo es de K′B′ con la OO′ perpendicular á la línea de tierra.

Problema XXX.

69. *Circunscribir una esfera á un tetráedro dado; ó lo que es lo mismo, hacer que pase su superficie por cuatro puntos dados* (fig. 41).

Tomarémos por plano horizontal el de una cualquiera, ABC por ejemplo, de las caras del tetráedro, y sea (S, S′) el cuarto vértice. El centro de la esfera que se pide ha de hallarse en la vertical tirada por el centro O del círculo que pasa por los tres puntos A, B, C. Además, haciendo pasar un plano por la vertical del (S, S′) y por el punto O, su interseccion con la esfera será una circunferencia de círculo máximo, de modo que, si se le rebate sobre el horizontal, haciéndole que gire alrededor de su traza SO, se determinarán los rebatimientos del centro y del radio de la esfera. Pero el punto (S, S′) se rebate en el *s*, que se obtiene levantando á SO por S una perpendicular S*s* = S′F. Luego, haciendo que pase una circunferencia por los tres puntos *s*, D y E, su centro *o* y su radio *os* serán los rebatimientos del centro y radio de la esfera; por lo que, tomando en la prolongacion de OG la distancia GO′ = O*o*, se tendrá la proyeccion vertical de este centro, y quedará el problema resuelto.

Problema XXXI.

70. *Inscribir una esfera en un tetráedro* (fig. 42).

Tomemos tambien por plano horizontal el de una cualquiera, ABC por ejemplo, de las caras del tetráedro, y sea (S, S′) el cuarto vértice. Sabemos que el centro de la esfera que se pide ha de hallarse en la interseccion de los planos bisectores de los tres ángulos diedros AB, BC, AC (G., 512, 1.°), de modo que será el vértice del tetráedro determinado por estos planos y el triángulo ABC. Por consiguiente, hay que hallar este vértice, y para ello determinar las direcciones de las tres aristas que concurren en él.

Para conseguirlo, con ayuda de tres planos verticales llevados por el vértice (S, S') perpendicularmente á las tres aristas AB, BC y AC, construyo los ángulos S'D'*s*, S'E'*s*, S'F'*s*, correspondientes á los tres ángulos diedros AB, BC y AC; divido luego cada uno de estos ángulos en dos partes iguales por las rectas D'*d'*, E'*e'*, F'*f'*; y los ángulos que estas formen con LT serán iguales á los que formarian con la base ABC las caras de la pirámide cuyo vértice buscamos; de modo que, si por los puntos D, E y F se hace pasar en los planos verticales SD, SE y SF rectas, que con las trazas horizontales de estos formen ángulos respectivamente iguales á *d'*D'*s*, *e'*E'*s*, *f'*F'*s*, estas rectas se hallarán trazadas en las caras de la pirámide. Por consiguiente, construyendo las proyecciones horizontales de los puntos en que estas rectas quedan cortadas por un plano horizontal cualquiera L'T', se tendrá las proyecciones de tres puntos de la seccion causada por este plano en la pirámide desconocida; seccion cuyos lados son paralelos á los de la base ABC. Pero la traza vertical de este plano corta á las rectas D'*d'*, E'*e'*, F'*f'*, respectivamente en los puntos *d'*, *e'*, *f'*, desde las cuales bajo á LT las perpendiculares *d'd*, *e'e*, *f'f*; tomo en seguida las distancias D'*d*, E'*e*, F'*f* sobre las respectivas rectas DS, ES, FS, y los puntos δ, ε y φ, que de este modo se determinan, son las proyecciones de los puntos de que se trata. Tiro, pues, por ellos paralelas á los respectivos lados AB, BC y AC de la base, y formo así la proyeccion horizontal *abc* de la interseccion del tetráedro buscado con el plano L'T', de modo que las aristas de este tendrán por proyecciones horizontales las rectas A*a*, B*b* y C*c*; luego su punto de concurso O será la proyeccion de su vértice; esto es, del centro de la esfera que se pide.

Para tener la proyeccion vertical O', proyectarémos el punto *a* en *a'* sobre L'T', y uniendo *a'* con A' tendrémos en *a'*A' la proyeccion vertical de la arista que va á terminar en A, de modo que, bajando desde O una perpendicular á la línea de tierra, tendrémos el punto O', y los círculos descriptos desde O y O' con el radio O'R' serán las dos proyecciones de la superficie esférica.

Problema XXXII.

71. *Construir los puntos de interseccion de una recta y una superficie cónica dadas.*

Tiremos un plano por la recta y el centro de la superficie cónica, y es claro que los puntos que se pide pertenecerán á las generatrices en que el plano corte á la superficie; pero los piés de estas serán los puntos en que la traza horizontal de aquel encuentre á la de esta, luego estarán determinadas, y reducida la cuestion á construir los puntos en que corten á la recta dada.

Problema XXXIII.

72. *Construir los puntos de interseccion de una recta con la superficie de una esfera dada* (fig. 43).

El plano que proyecta horizontalmente la recta corta á la esfera por un círculo menor cuyos puntos de seccion con aquella son los mismos que se busca. Sean, pues, (O, O′) el centro de la esfera, y (AB, A′B′) la recta que se da. El diámetro del círculo menor de que se trata será evidentemente igual á la cuerda CD que deja AB en el OCD. Luego, rebatiendo el plano vertical AB sobre el horizontal, el centro del círculo menor se colocará en la OE á una distancia de E igual á O′F, porque es el pié de la perpendicular bajada desde (O, O′) al plano AB; por consiguiente, será fácil trazar el rebatimiento de este círculo. Tambien se hallaria el AB″ de la recta dada, construyendo el de (B, B′). De modo que *m* y *n* lo son de los dos puntos pedidos. Se volverá el plano auxiliar á su posicion primitiva, y se determinarán así sus proyecciones horizontales M y N, y en su consecuencia, las verticales M′ y N′.

Podria tomarse por plano auxiliar el que pasara por la recta dada y el centro de la esfera, y construir despues los rebatimientos sobre el plano horizontal del círculo máximo en que aquel corte á la esfera, y de la recta dada, lo que haria conocer los de los puntos pedidos; de modo que, volviendo el plano á su posicion primitiva, seria fácil obtener las proyecciones de estos.

Esta construccion es mas complicada que la anterior; pero, sin embargo, aconsejamos á los lectores que la ejecuten, porque ofrece una nueva aplicacion del método de los rebatimientos.

Problema XXXIV.

73. *Construir las proyecciones de la hélice y de su tangente sobre un plano perpendicular á la base del cilindro en que esta curva se halla trazada.*

Tomarémos como plano horizontal de proyeccion el de la base del cilindro, y por vertical uno paralelo al que pase por el eje de este y el orígen de la hélice. Sea ABCD (fig. 44) la traza del cilindro circular recto sobre el que la curva está trazada; (A, *a*A′), (C, *c*C′) serán las proyecciones de las generatrices estremas del cilindro, y (A, *a*) las del orígen de la hélice.

Tomemos un punto cualquiera M sobre la circunferencia ABCD, el cual será proyeccion horizontal de aquellos en que las diferentes espiras de la hélice quedan cortadas por la generatriz (M, *m*G). Propongámonos construir la proyeccion vertical del correspondiente á la primera espira. Hemos visto (G., 779) que la distancia de un punto de la hélice á la base del cilindro es proporcional á la proyeccion sobre esta base del arco de curva comprendido entre este punto y el orígen, luego la razon de la altura que tiene el punto que se considera sobre el plano horizontal con el arco AM de la base del cilindro, es igual á la de $\frac{h}{\text{circunf.}^{\text{a}}\ \text{OA}}$, llamando h al paso de la hélice. Bastará, pues, construir una cuarta proporcional á AM, h y circunf.ª OA, llevarla sobre *m*G′ desde *m* á M′, y este último punto será la proyeccion vertical buscada.

Para construir con prontitud y facilidad la de la hélice, se dividirá la circunferencia de la base del cilindro y el paso de aquella *a*H′ en un mismo número de partes iguales, por ejemplo en doce, y por cada punto de division de una y otro, se tirarán una paralela y una perpendicular á la línea de tierra, y en su interseccion tendrémos un punto de la proyeccion vertical de la hélice. En efecto, para uno cualquiera de los así determinados (μ, μ'), por ejemplo, se tiene

$$\frac{\mu' n}{\text{arco A}\mu}=\frac{h}{\text{circunf.}^{\text{a}}\ \text{OA}};$$

luego pertenece á la hélice.

Si queremos construir las proyecciones de la tangente en el punto (M, M′), observarémos que la horizontal es la tangente MV, traza del plano vertical que toca al cilindro por la generatriz (M, *m*M′); por otra parte, hemos visto (G., 782) que la subtangente de un punto cualquiera de la hélice es igual á la proyeccion AM del arco comprendido entre este punto y el orígen de la curva sobre la base del cilindro; luego, tomando una longitud MU igual al arco AM de la circunferencia de la base rectificada, tendrémos la traza horizontal de la tangente á la hélice en el punto (M, M′). Proyectando U en *u* sobre la línea de tierra, y tirando uM', la $uM'V'$ será la proyeccion vertical de esta tangente.

74. PROBLEMAS PARA SU RESOLUCION. 1.° *Hallar sobre una recta dada un punto tal, que su distancia á otro de la misma sea igual á una longitud* m (14).

2.° *Por un punto dado tirar una recta que encuentre á otras dos.* Por aquel y cada una de las rectas llévense planos, y la interseccion de estos resolverá el problema.

3.° *Tirar por un punto dado en el plano vertical una recta que forme con los de proyeccion los ángulos* α *y* β.

4.° *Dadas la proyeccion horizontal de un punto y su distancia á un plano conocido, determinar su proyeccion vertical.*—Tirando un plano vertical perpendicular al dado, por el punto que se busca, el pié de la perpendicular, cuya longitud se conoce, estará en la interseccion de los dos planos.

5.° *Hallar sobre una recta dada un punto cuya distancia á otro dado sea igual á una longitud conocida* (34).

6.° *Construir un plano que tenga por traza horizontal una recta dada y que forme con el vertical un ángulo dado.*—Discusion.

7.° *Tirar un plano que forme con los de proyeccion los ángulos dados* α *y* β.—La solucion de este problema se funda sobre este principio; que las perpendiculares bajadas desde el punto O (fig. 20) sobre las hipotenusas de los triángulos rectángulos $OA'A''$ y $OB'A^{iv}$ son iguales, porque no son mas que los rebatimientos de la tirada desde este punto sobre el plano PQR'.

8.° *Valuar el volúmen de un tetráedro, conociendo las proyecciones de sus cuatro vértices* (14, 17 y 29).

9.° *Tirar por una recta dada* AB (G., fig. 212) *un plano que forme con otro* MN *un ángulo dado* k.—Desde un punto cualquiera tomado sobre la recta AB, bájese una perpendicular AO sobre el MN; despues, desde su pié, como centro, descríbase un circunferencia con un radio igual al lado adyacente al ángulo *k* en un triángulo rectángulo AOC que tenga el otro cateto igual á esta perpendicular. La tangente tirada á este círculo por el punto B, en que la recta dada atraviesa á su plano, acabará de determinar el pedido. Esta construccion se ejecutará por el método de los rebatimientos, y puede simplicarse mucho si el plano dado es uno de los de proyeccion.

FIN DE LA GEOMETRÍA DESCRIPTIVA.

ÍNDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE TOMO.

LIBRO I.

DE LAS LÍNEAS.

LIBRO II.

DE LOS POLÍGONOS.

LIBRO III.

LÍNEAS PROPORCIONALES Y POLÍGONOS SEMEJANTES.

CAPÍTULO I. — **Líneas proporcionales.**

LIBRO IV.

POLÍGONOS REGULARES Y RELACION DE LA CIRCUNFERENCIA AL DIÁMETRO.

LIBRO V.

ÁREAS DE LAS SUPERFICIES PLANAS Y SU COMPARACION.

LIBRO VI.

SUPERFICIES PLANAS INDEFINIDAS.

CAPÍTULO I. — Planos y líneas rectas.

CAPÍTULO II. — Ángulos diedros y poliedros.

LIBRO VII.

SUPERFICIES CURVAS.

LIBRO VIII.

POLIEDROS.

LIBRO IX.

ÁREAS DE LOS CUERPOS.

LIBRO X.

VOLÚMENES.

LIBRO XI.

DE ALGUNAS CURVAS USUALES.

NOTAS SOBRE LA GEOMETRÍA Y ADICIONES.

APÉNDICE AL LIBRO III

APÉNDICE II.

APÉNDICE III.

TEORÍA DE LA HIPERBOLA.

APÉNDICE IV.

SECCIONES CÓNICAS Y CILÍNDRICAS.

GEOMETRÍA DESCRIPTIVA.

FIN DEL ÍNDICE.

TRATADO ELEMENTAL

DE FÍSICA

EXPERIMENTAL Y APLICADA

Y DE METEOROLOGÍA

Con una numerosa coleccion de problemas, é ilustrado con 597 preciosos grabados en madera intercalados en el texto, por A. Ganot; traducido al castellano por D. José Monlau. *Cuarta edicion española*, revisada y aumentada segun la *última edicion francesa*, por D. José Canalejas y Casas.—*Obra aprobada para texto por el Gobierno de S. M.* Madrid, 1865. Un tomo en 8.° prolongado con 597 magníficos grabados, 32 rs. en Madrid y 36 en provincias, franco de porte.

TRATADO PRÁCTICO DE FOTOGRAFÍA

Ó SEA QUÍMICA FOTOGRÁFICA

Que contiene: los elementos de Química explicados por medio de ejemplos aplicados á la Fotografía.—Los procedimientos sobre cristal (colodion húmedo, seco ó albuminado), sobre papel y sobre placa.—El modo de preparar por sí mismo, ensayar y emplear todos los reactivos y de utilizar los residuos; escrito en francés por MM. BARRESWIL Y DAVANNE; traducido al castellano y aumentado con los procedimientos conocidos hasta el dia, por D. Benito de Cereceda. Madrid, 1864. Dos tomos en 8.°, con 93 magníficos grabados intercalados en el texto, 40 rs. en Madrid y 46 en provincias, franco de porte.

TRATADO PRÁCTICO DE NIVELACION

CON TRES APÉNDICES

Uno sobre trazado de Arcos de círculo de gran radio, y los otros dos con las demostraciones del cálculo de las cotas y de la fórmula prismoidal de Sir John Mac-Neil; por D. Venancio de la Tejera. —*Segunda edicion*, acompañada de cinco láminas. Un tomo en 8.°, 20 rs. en Madrid y 24 en provincias, franco de porte.

MILNE-EDWARDS Y COMTE. *Elementos de Zoología*, ó Historia natural de los animales: escritos en francés para uso de los colegios y de las escuelas normales. Obra adoptada por el Consejo real de Instruccion pública para servir de texto en la enseñanza de la Historia natural en los establecimientos de la Universidad de Francia; adornada con 29 láminas. Traducidos al castellano de la cuarta edicion por D. Pedro Barinaga, individuo de varias sociedades científicas y literarias.—*Obra aprobada para texto por el Real Consejo de Instruccion pública.—Segunda edicion.* Madrid, 1863. Un tomo en 8.°, 30 rs. en Madrid y 34 en provincias, franco de porte.

ANUARIO

DE LOS PROGRESOS TECNOLÓGICOS

DE LA INDUSTRIA Y DE LA AGRICULTURA.

Resúmen de los adelantos de las ciencias aplicadas; descripcion de las construcciones, inventos y procedimientos industriales que han surgido en el año de 1861, por D. José CANALEJAS Y CASAS. *Año primero*. 1861 para 1862. Madrid, 1862. Un tomo en 8.°, ilustrado con 21 grabados en madera intercalados en el texto. Precio: 24 rs. en Madrid y 28 en provincias, franco de porte.

ANUARIO

DE LOS PROGRESOS TECNOLÓGICOS

DE LA INDUSTRIA Y DE LA AGRICULTURA.

Resúmen de los adelantos de las ciencias aplicadas; descripcion de las construcciones, inventos y procedimientos industriales que han surgido en el año de 1862. (Estudios y Descripcion ilustrada de la Exposicion universal de Lóndres en 1862), por D. José CANALEJAS Y CASAS. *Año segundo*. 1863. Madrid, 1863. Un tomo en 8.°, ilustrado con muchos grabados en madera intercalados en el texto, buen papel y esmerada impresion. Precio: 24 rs. en Madrid y 28 en provincias, franco de porte.

ANUARIO

DE LOS PROGRESOS TECNOLÓGICOS

DE LA INDUSTRIA Y DE LA AGRICULTURA.

Resúmen de los adelantos de las ciencias aplicadas; descripcion de las construcciones, inventos y procedimientos industriales que han surgido en el año de 1863, por D. José CANALEJAS Y CASAS. *Año tercero*, para 1864. Madrid, 1864. Un tomo en 8.°, ilustrado con muchos grabados en madera intercalados en el texto. Precio: 24 rs. en Madrid y 28 en provincias, franco de porte.

ANUARIO

DE LOS PROGRESOS TECNOLÓGICOS

DE LA INDUSTRIA Y DE LA AGRICULTURA.

Resúmen de los adelantos de las ciencias aplicadas; descripcion de las construcciones, inventos y procedimientos industriales que han surgido en el año de 1864, por D. José CANALEJAS Y CASAS. *Año cuarto*, para 1865. Madrid, 1865. Un tomo en 8.°, ilustrado con muchos grabados en madera intercalados en el texto. Precio: 24 rs. en Madrid y 28 en provincias, franco de porte.

TRATADO TEÓRICO PRÁCTICO

DE LOS

PRODUCTOS NATURALES

Y ARTÍCULOS FABRICADOS QUE SON OBJETO DE COMERCIO

Con las nociones de física, química, historia natural y análisis indispensables á este estudio; dispuesto para uso de los alumnos de la carrera pericial de aduanas, de la Escuela profesional de Comercio de esta corte, comerciantes, comisionistas, corredores, etc., etc. —PRIMERA PARTE. *Nociones de Física*, *Química*, *Productos minerales* y *Análisis química*, por D. Constantino Saez de Montoya, consultor químico de la Direccion general de Aduanas, individuo de la Junta calificadora de los empleados periciales de dicha renta y profesor en el Real Instituto industrial.—SEGUNDA PARTE. *Nociones de Historia natural* y *Productos vegetales y animales*, por D. Luis María Utor y Suarez, alumno de la extinguida Escuela normal para Profesores industriales, catedrático de conocimiento de productos comerciales de la Escuela profesional de Comercio en el Real Instituto industrial. Madrid, 1862. Dos tomos en 4.°, 60 rs. en Madrid y 66 en provincias, franco de porte.

SCHREBER. *Manual popular de Gimnasia de sala* médica é higiénica, ó Representacion y descripcion de los movimientos gimnásticos que, no exigiendo ningun aparato para su ejecucion, pueden practicarse en todas partes y por toda clase de personas de uno y otro sexo; seguido de sus aplicaciones á diversas enfermedades; vertido del aleman por H. Van Oordt; traducido al castellano y considerablemente aumentado por D. E. S. O.; acompañado de 45 figuras intercaladas en el texto. *Cuarta edicion.* Madrid, 1864. Un tomo en 18.°, 10 rs. en Madrid y 12 en provincias, franco de porte.

TRATADO

DE QUIMICA GENERAL

QUE COMPRENDE

Las aplicaciones de esta ciencia á la análisis química, á la industria, á la agricultura y á la historia natural, por PELOUZE Y FREMY; traducido al castellano de la última edicion francesa por D. Julian Casaña y Leonardo, doctor en farmacia y en ciencias, profesor auxiliar de esta facultad en la Universidad central, ayudante de la cátedra de Análisis química en la de Farmacia, etc. Madrid, 1865. 6 tomos en 8.° mayor, con un gran número de grabados intercalados en el texto. *(En preparacion).*

GALLUR Y SALA. *La Contabilidad legal* : *Teneduría de libros.* Obra recomendada por la Sociedad económica de Amigos del país. Un tomo en 4.° prolongado, de esmeradísima y lujosa impresion.—Contiene la teoría y práctica de la partida doble, sujeta á los preceptos del Código de Comercio. Precio : 24 rs. en Madrid y 28 en provincias, franco de porte.

HOEFER. *Nomenclatura y clasificaciones químicas*, seguidas de un léxico histórico y sinonímico, que comprende los nombres antiguos, las fórmulas,

. los nombres nuevos, el nombre del autor y la fecha del descubrimiento de los principales productos de la química. Madrid, 1853. Un tomo en 8.°, 12 rs. en Madrid y 14 en provincias, franco de porte.

CURSO ELEMENTAL

DE MECÁNICA

TEÓRICA Y APLICADA

ESCRITO EN FRANCÉS POR **M. CH. DELAUNAY.**

Traducido al español de la última edicion francesa y completado en su texto y láminas, con cálculos, tablas, estudios teóricos y nuevas aplicaciones admitidas en la práctica industrial, por D. José Canalejas y Casas, ingeniero mecánico, antiguo pensionado en el estranjero por el ministerio de Marina, etc.: obra acomodada á las necesidades de las escuelas y de los establecimientos públicos. Madrid, 1864. Un grueso tomo en 8.° prolongado, ilustrado con 577 magníficos grabados en madera intercalados en el texto, 40 rs. en Madrid y 46 en provincias, franco de porte.

CANCIONERO

POPULAR.

COLECCION ESCOGIDA DE SEGUIDILLAS Y COPLAS

RECOGIDAS Y ORDENADAS

POR D. EMILIO LAFUENTE Y ALCÁNTARA

DE LA REAL ACADEMIA DE LA HISTORIA.

El CANCIONERO POPULAR consta de dos volúmenes en 8.°, buen papel y esmerada impresion, de mas de 400 páginas cada uno, comprendiendo el primero mil quinientas seguidillas, clasificadas convenientemente, y precedidas de un discurso sobre la poesía popular. El 2.° contiene tres mil coplas, con numerosas variantes y notas.

Esta importante obra es *conveniente á todas las clases de la sociedad* y puede considerarse como el verdadero *libro popular*: su amenidad y variedad es tal, que **nunca envejecerá, siempre será de moda**, en todo tiempo y en cualquier circunstancia **procurará distraccion** *al lector;* y á fin de hacerle accesible á todas las fortunas, se vende al ínfimo precio de 28 rs. en Madrid y 34 en provincias, franco de porte.

MÉTODO DE AHN. *Primer curso de francés*, arreglado al castellano por el profesor H. Mac-Veigh. *Cuarta edicion*, revisada y aumentada con un *Compendio de Gramática francesa*, por D. A. C. Madrid, 1865. Un tomo en 8.° Precio: 8 rs. en rústica y 10 encartonado, franco de porte, para toda España.

Prefacio del Autor.

«*Aprended un idioma extranjero como habeis aprendido vuestra lengua nativa*: hé aquí en pocas palabras el método que he seguido al escribir esta obrita. Es el método de la misma naturaleza y el que emplea una madre cuando habla á su hijo, repitiéndole cien veces las mismas palabras, combinándolas imperceptiblemente, y logrando de esta manera hacerle hablar la lengua que ella habla. Aprender de este modo, no es estudio, es un entretenimiento.»

Este método está hoy reconocido por el mas sencillo de cuantos se han publicado hasta el dia para aprender á leer, escribir y hablar el francés con toda perfeccion y en muy breve tiempo. En apoyo de esto debemos decir que dicho método se halla adaptado á todas las lenguas, y señalado para texto en todas las Universidades, Institutos y Colegios de España, Francia, Inglaterra, Alemania, etc., etc. Solo nos falta decir que en menos de un año se han agotado cuatro ediciones de este Curso de Francés arreglado al castellano.

NUÑEZ DE TABOADA. *Diccionario francés-español y español-francés*, mas completo que todos los que se han publicado hasta ahora. *Nueva edicion* (*Décimacuarta*), del todo revista y notablemente aumentada con documentos del autor, y segun las últimas ediciones de los Diccionarios de las Academias francesa y española, y los lexicones los mas estimados de estas naciones. Paris. 2 tomos en 4.°, 60 rs.

Recomendamos muy particularmente á todos los catedráticos y profesores de francés y de español la nueva edicion de Nuñez de Taboada, como superior á todos los Diccionarios publicados hasta el dia, y esperamos que los que aun no la conocen nos pidan un ejemplar, á fin de que lo examinen y se convenzan de su superioridad sobre los demás, pues le consideramos, sin duda alguna, como el *único clásico* digno de una recomendacion eficaz á todos los alumnos.

BREWER. *La llave de las ciencias*. Manual para el conocimiento de los fenómenos comunes de la naturaleza; por el doctor E. C. Brewer; traducido de la última edicion inglesa, con muchos grabados. Un tomo en 8.°, 8 rs. en Madrid y 10 en provincias, franco de porte.

REGNAULT. *Curso elemental de Química* para uso de las universidades, colegios y escuelas especiales; traducido de la *última edicion francesa* por el teniente coronel D. Gregorio Verdú. *Obra aprobada para texto*. Paris, 1850-1853. 4 tomos en 8.°, ilustrados con un gran número de figuras intercaladas en el texto, 96 rs. en Madrid y 108 en prov., franco de porte.

DUMAS. *Resúmen de las Lecciones de química* pronunciadas en la Escuela central de artes y manufacturas de Francia. Madrid, 1849. Un tomo en 4.° prolongado, con dos láminas, 30 rs.

GRANDSAGNE. *Manual del Arte de estudiar con fruto*, ó sea Guia del que quiere instruirse y utilizar la memoria y el tiempo: obra escrita en francés por A. de Grandsagne, Jullien y V. Parisot; revisada y traducida al español por D. José Canalejas y Casas. Madrid, 1862. Un tomo en 18.°, 10 rs. en Madrid y 12 en provincias, franco de porte.

SISTEMA DECIMAL (El) *al alcance de todos*, que contiene: De la unidad, de la numeracion, quebrados, decimales, suma de decimales, resta de decimales, multiplicacion, division; sistema monetario, real decreto; nuevo sistema monetario, monedas legales; sistema métrico, ley de pesas y medidas, nuevas medidas y pesas legales, medidas longitudinales; sus múltiplos, sus divisores, medidas superficiales; medidas de capacidad y arqueo para áridos y líquidos; sus múltiplos, sus divisores, medidas cúbicas ó de solidez, medidas de ponderales, sus múltiplos, sus divisores; teorías generales del sistema métrico; medidas lineales, medidas superficiales ó agrarias, medidas de capacidad para áridos, para vino, aguardiente y licores, para aceite y leche; medidas ponderales; tabla de correspondencia entre las nuevas medidas métricas con las que actualmente se usan en todas las provincias, conforme á los datos publicados por el gobierno. En 8.°, de 32 páginas, 2 rs. en Madrid y 3 en provincias, franco de porte.

BAUTAIN. *Estudio sobre el arte de hablar en público*. Traducido por D. N. C. y D. A. B. abogados del ilustre colegio de Barcelona. Un tomo en 12.°, 12 rs.

GREGORY. *Coleccion de cartas escogidas*, traducidas por D. Andrés García Camba. Un tomo en 8.°, 20 rs.

Novelas de autores de gran fama.

AIMARD.................... *Los Tiradores indígenas*. Novela traducida por D. J. F. Saenz de Urraca. Un tomo en 8.°, 14 rs.

AIMARD.................... *Los Merodeadores de fronteras*. Novela traducida por D. J. F. Saenz de Urraca. Un tomo en 8.°, 14 rs.

AIMARD.................... *Corazon Leal*. Novela traducida por D. J. F. Saenz de Urraca. Un tomo en 8.°, 14 rs.

AIMARD.................... *La Ley de Lynch*. Novela traducida por D. J. F. Saenz de Urraca. Un tomo en 8.°, 14 rs.

AIMARD.................... *Los Filibusteros*. Novela traducida por D. J. F. Saenz de Urraca. Un tomo en 8.°, 14 rs.

AIMARD.................... *La Fiebre de oro*. Un tomo. (*En preparacion*).

AIMARD.................... *Los Tramperos del Arkansas*, — *El Rey de las Tinieblas*, — *Valentin y Curumilla*, — y *Los Piratas de las Praderas*, novelas escritas tambien por Gustavo Aimard, y traducidas por Saenz de Urraca, se han dado á luz en el periódico *La Lectura para todos*, el cual contiene además otras muchas excelentes é interesantes novelas; tanto que esta hermosa coleccion puede considerarse como el *Almacen* de las novelas mas escogidas de la época. Consta de tres tomos con láminas. Precio de cada uno, 38 reales en Madrid y 48, franco de porte, por el correo.

Nota. Las demás de este autor saldrán á luz en un breve plazo.

PAUL DE KOCK.......... *La familia Braillard*. Novela traducida por don Antonio Rotondo. 2 tomos, 24 rs.

PAUL DE KOCK.......... *La Jóven de las tres enaguas*. Novela traducida por D. Manuel García Gonzalez. Un tomo ilustrado con una preciosa lámina grabada en acero, 12 rs.

PAUL DE KOCK.......... *El Asno del señor Martin*. Novela traducida por D. Manuel García Gonzalez. Un tomo ilustrado con una preciosa lámina grabada en acero, 12 rs.

PAUL DE KOCK.......... *La Mujer de las tres caras*. Novela traducida por D. Cárlos Frontaura. 2 tomos en 8.°, 24 rs.

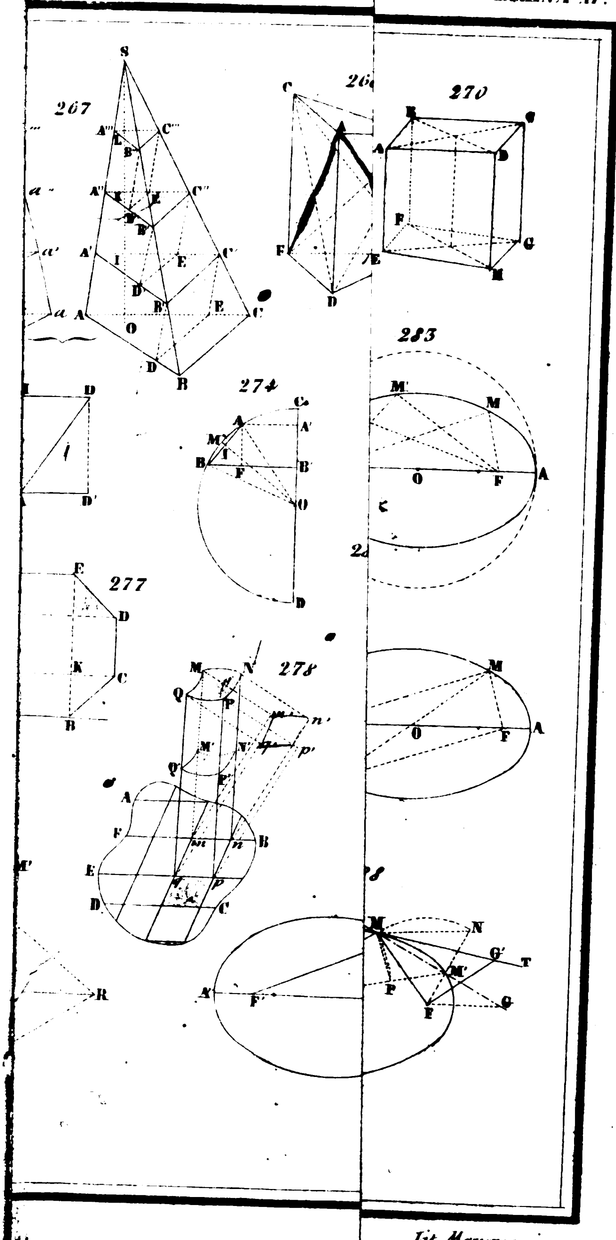
LANDELLE.................. *Un Odio á bordo*: novela traducida por D. Felipe Carrasco de Molina. Un tomo en 8.°, 14 rs.

PONSON DU TERRAIL. *Las Noches de la Maison doreé*. Novela traducida por D. Felipe Carrasco de Molina. Un tomo en 8.°, 10 rs.

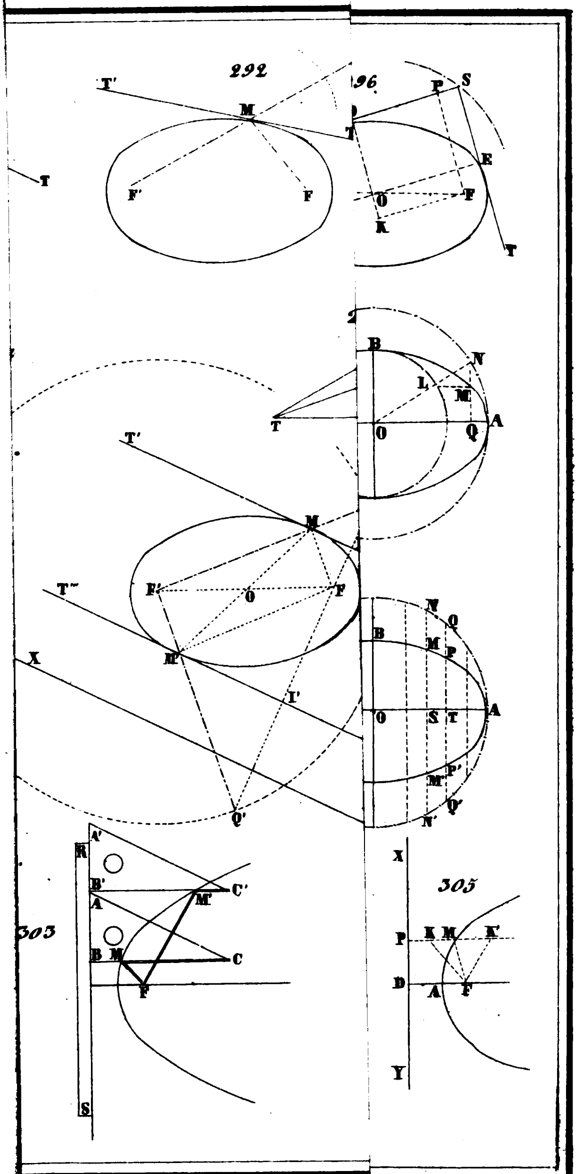
PONSON DU TERRAIL. *Los dramas de Paris*. Primer episodio: Los dos hermanos. — 2.°: El Club de los exploradores: 3.°: Las Hazañas de Rocambole. — 4.°: El desquite de Baccarat; 8 tomos en 8.°, 56 rs.

Madrid: 1865. — Imp. de Bailly-Bailliere.

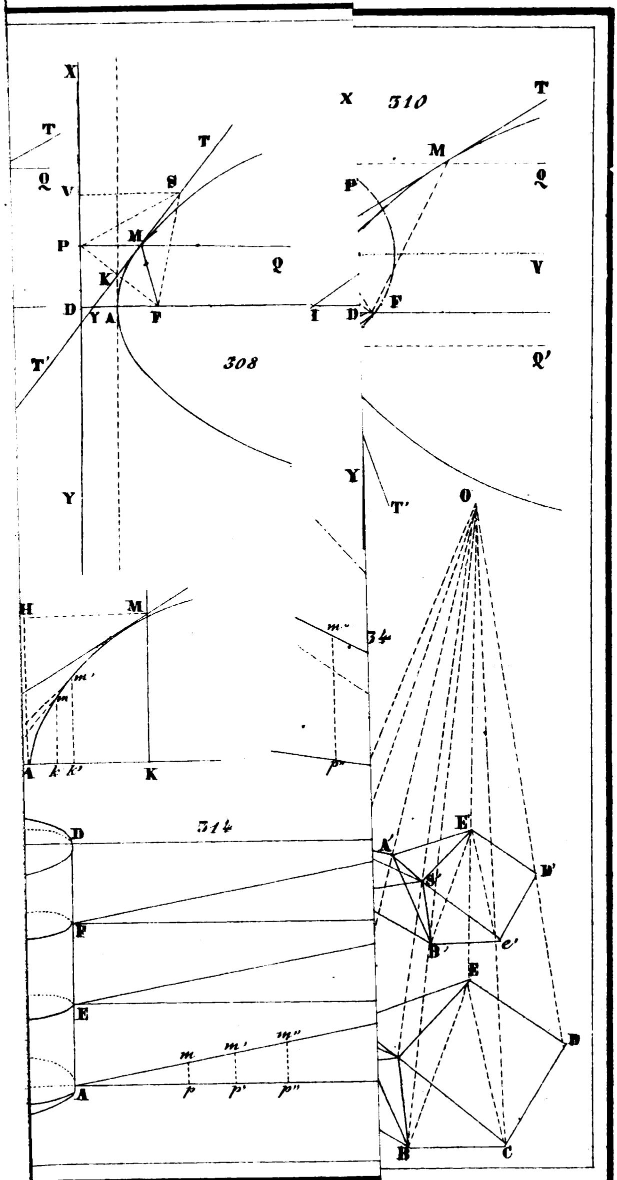
LAMINA XI.



Lit Marquerie.

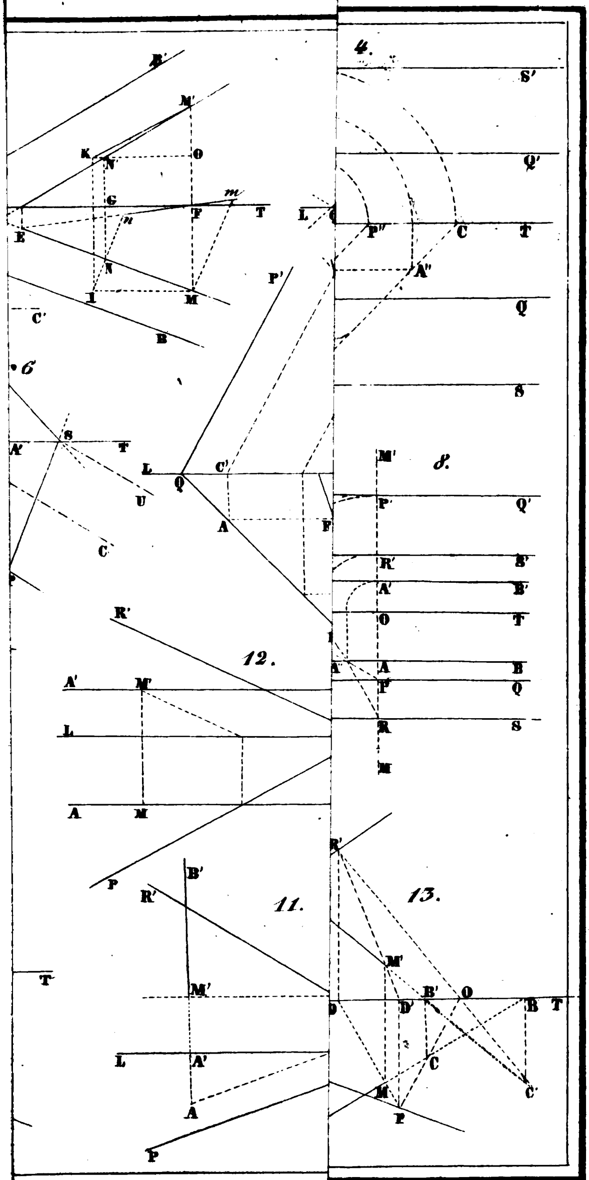


Lit. Marquerie



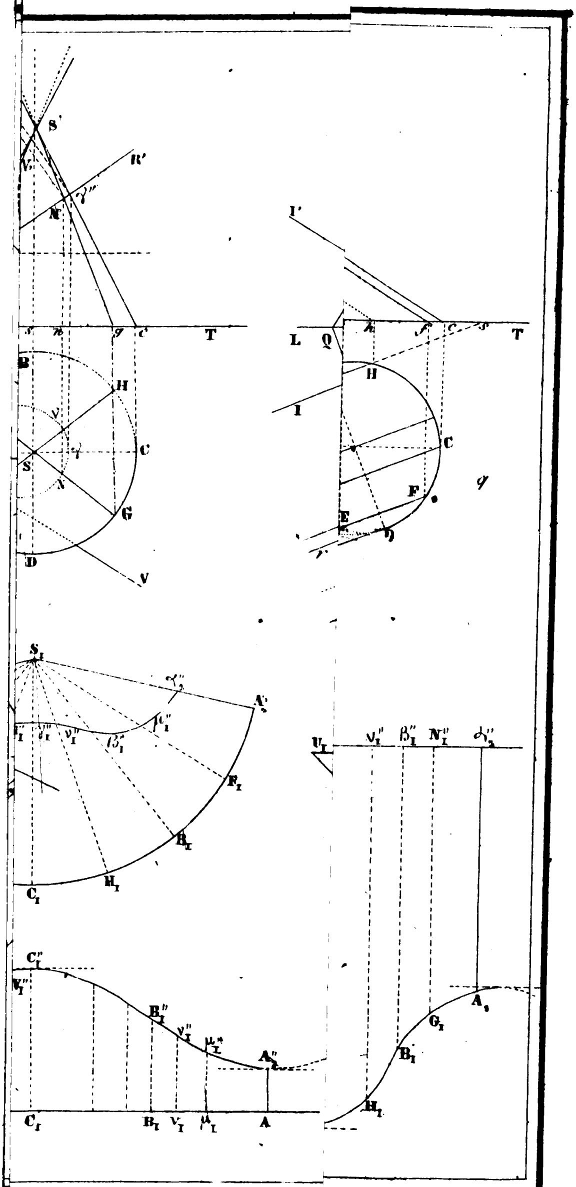
Lit. Marquerie

LAMINA I



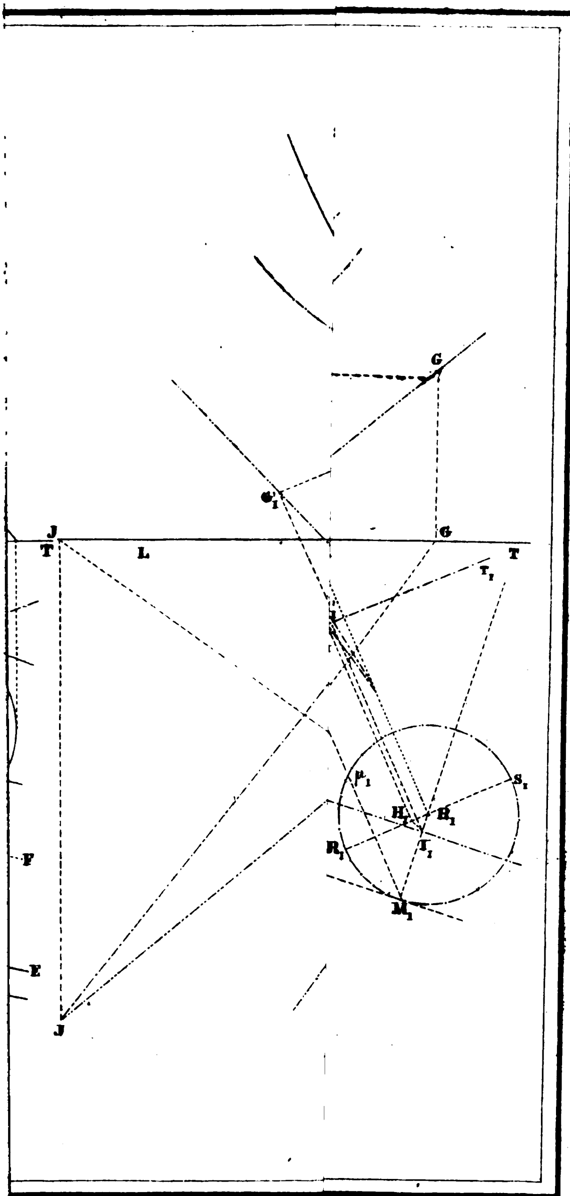
Lit Marquerie.

LAMINA IV

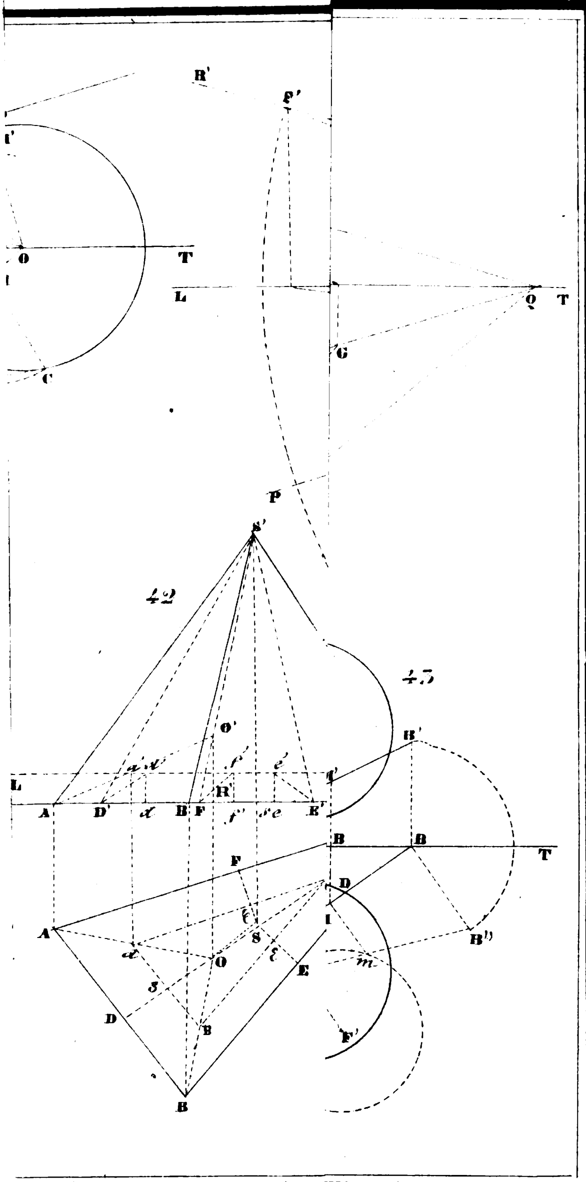


Lit Marquerie

LAMINA V



Lit Marquerie


R'
P'
O
T
L
Q
T
G
C
P
S'
42
43
O'
B'
L
A
D'
B
F
E'
B
B
T
F
D
A
S
O
E
D
B
I
B''
m
F'
B